受験番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

東京大学大学院工学系研究科システム創成学専攻
平成 21 年度大学院修士課程

「論理的思考能力を見るための数理的問題」

入学試験問題および解答用紙

平成 20 年 9 月 1 日（月）13:00～15:30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. 落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所を見出した場合には挙手し，試験監督者に伝えること。
3. このページの最上部の欄に受験番号のみを記入しなさい。それ以外の箇所に受験番号，氏名を書いてはいけません。
4. それぞれの問題の下に解答の道筋を書き，四角の中に答えを記入しなさい。
5. 計算用紙は別に配布します。
6. 問題は全部で 20 問あります。このうち任意の 15 問を選んで解答しなさい。
   選択した問題について，下の選択問題番号欄に○をつけなさい。
   16 問以上を選択することはできないので注意すること。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

第１問

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$\omega^2+\omega+1=0$

$\omega^2=-(\omega+1)$

$\omega^3=1$

とするとき，次の行列Aに対して，A^nを求めよ。ただし，nは正の整数，iは虚数単位とする。

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 1+\omega+\omega^2 & 1+\omega+\omega^2\\ 1+\omega+\omega^2 & 1+\omega^2+\omega & 1+1+1\\ 1+\omega+\omega^2 & 1+1+1 & 1+\omega+\omega^2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3\omega^2 & 3\omega\\ 3 & 3\omega & 3\omega^2\end{bmatrix}$$

$$=3\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega^2 & \omega\\ 1 & \omega & \omega^2\end{bmatrix}$$

$$A^4=3\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega^2 & \omega\\ 1 & \omega & \omega^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega\end{bmatrix}$$

$$=3\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=9E$$

よって、$A^4=9E=3^2E$

$$\boxed{A^n=\begin{cases}n=4k\ (k=1,2,\cdots)\text{のとき}\quad 3^{2k}E\\ n=4k+1\ (k=0,1,\cdots)\text{のとき}\quad 3^{2k}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega\end{bmatrix}\\ n=4k+2\text{のとき、}\quad 3^{2k+1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\\ n=4k+3\text{のとき、}\quad 3^{2k+1}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega^2 & \omega\\ 1 & \omega & \omega^2\end{bmatrix}\end{cases}}$$

第 2 問

9 つの文字 AAAABBCCC を横一列に無作為に並べるとき，AABCCCBAA のように左右対称な配列となる確率を求めよ。

左右対称になるとき

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \bigcirc\ \boxed{4}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}$

よって、奇数個であるCが中心にくるとき以外は左右対称にはならない。また、左右対称な並び方は$\boxed{1}$~$\boxed{4}$を決めれば決まる。よって、残ったAABCを並べる

$\frac{4!}{2!}=12$ 通り。ここで確率だから重複を数えて

$12\times 3!\times 2!\times 4!$ 通り

よって $\dfrac{\cancel{3}\times\cancel{4}\times 3\times 2\times\cancel{1}\times\cancel{2}\times 1\ \cancel{4\times 3\times 2\times 1}}{{}^{3}\cancel{9}\times\cancel{8}\times 7\times\cancel{6}\times 5\times\cancel{4\times 3\times 2\times 1}} = \dfrac{1}{27}$

$$\boxed{\dfrac{1}{27}}$$

第 3 問

関係式

$$lmn = 2l + m + n, \quad l \geq m \geq n$$

を満たす正の整数 (l, m, n) の組を全て求めよ。

$n \leqq m \leqq l$ より

$lmn = 2l + m + n \leqq 4l$

$mn \leqq 4$

ここで $mn \leqq 4$ かつ $n \leqq m$

をみたす正の整数の組は.

(n, m)

$=$ ① $(1,1)$, ② $(1,2)$, ③ $(1,3)$,

④ $(1,4)$, ⑤ $(2,2)$ の5つ.

このうち、l も正の整数になるのは、

① $l = 2l + 2$ $\quad l = -2$ ×

② $2l = 2l + 3$ $\quad$ ×

③ $3l = 2l + 4$ $\quad l = 4$ ○

④ $4l = 2l + 5$ $\quad l = \frac{5}{2}$ ×

⑤ $4l = 2l + 4$ $\quad l = 2$ ○

よって.

(l, m, n)

$= (4, 3, 1)$,

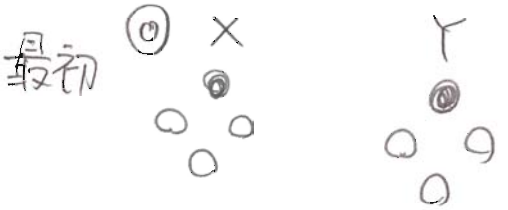
$(2, 2, 2)$

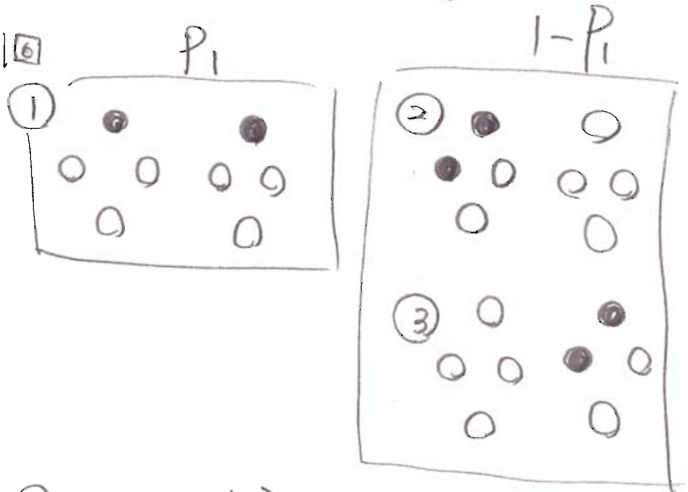
第 4 問

箱 X，箱 Y には，それぞれに黒玉が 1 個，白玉が 3 個，合計 4 個ずつ入っている。1 回の試行で玉 1 個を無作為に選び交換する。N 回の試行後に，最初と同じ状態になっている確率を求めよ。

N回の試行後に最初と同じ状態になっている確率を P_N とおく。

$P_0 = 1$





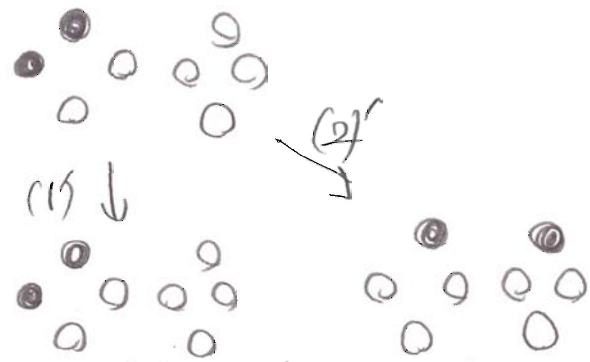
⓪→① の確率は、

$$\underbrace{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}_{\text{両方●}}+\underbrace{\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}}_{\text{両方○}}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$$

⓪→② は $\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$　①→②も $\frac{3}{16}$

ここで、X,Yの区別をしないで考えると、2のパターンしかないのがわかる。

ここで



(1)'の確率は、$\frac{1}{2}$　(2)'も $\frac{1}{2}$

以上より、

$$P_{n-1} \xrightarrow{\frac{5}{8}} P_n$$
$$1-P_{n-1} \xrightarrow{\frac{1}{2}} P_n$$
$$1-P_n$$

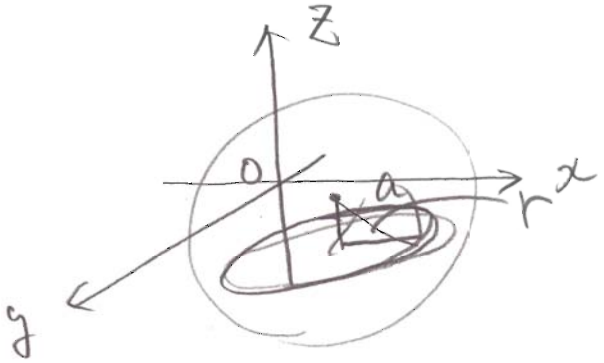
から、

$$P_n=\frac{5}{8}P_{n-1}+\frac{1}{2}(1-P_{n-1})$$
$$=\frac{1}{8}P_{n-1}+\frac{1}{2}$$
$$P_n=\left(\frac{1}{8}\right)^n\left(P_0-\frac{4}{7}\right)+\frac{4}{7}$$
$$=\frac{3}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n+\frac{4}{7}$$

$$\boxed{\frac{3}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^N+\frac{4}{7}}$$

第５問

半径 r の球を考える。これが x-y 平面 $(z=0)$ と交わる円の半径を a, y-z 平面 $(x=0)$ と交わる円の半径を b, z-x 平面 $(y=0)$ と交わる円の半径を c とするとき，座標の原点と球の中心との距離を求めよ。



①より

$$r_z^2 = r^2 - a^2$$

$$r_z = \pm\sqrt{r^2 - a^2}.$$

同様に、$r_x = \pm\sqrt{r^2 - b^2}$

$r_y = \pm\sqrt{r^2 - c^2}$

よって、中心の座標は

$$\left(\pm\sqrt{r^2 - b^2},\ \pm\sqrt{r^2 - c^2},\ \pm\sqrt{r^2 - b^2} \right)$$

符号は順不同で８パターンある。

原点との距離は、

$$\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{3r^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\boxed{\sqrt{3r^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}}$$

☆復習

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log|a|} \quad (a \neq 1)$$

第 6 問

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

を求めよ。

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| \quad (a \neq 0)$$

$$\int \log x\, dx = x(\log x - 1)$$

$x = \pi - t$ とおく

$dx = -dt$

$$X = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}(-dt)$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - X$$

$$2X = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

$s = \cos t$ とおく

$ds = -\sin t\, dt$

$$= \pi\int_1^{-1} \frac{\sin t}{1+s^2}\left(-\frac{ds}{\sin t}\right)$$

$$= \pi\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+s^2}ds = \pi\left[\tan^{-1}(s)\right]_{-1}^{1}$$

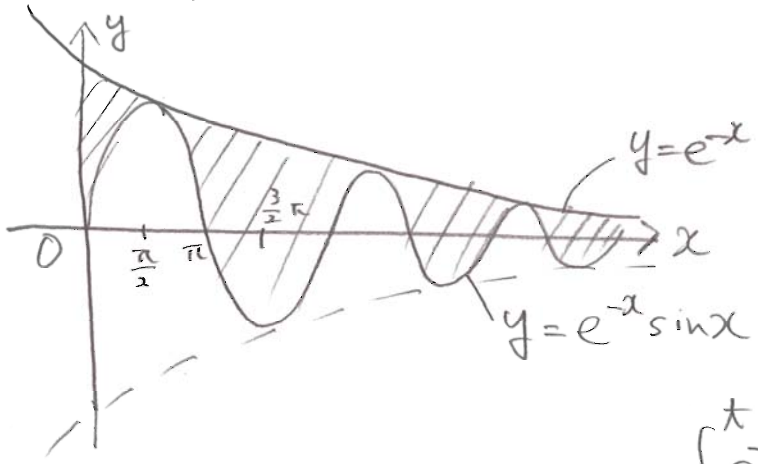
$$= \pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

$$X = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\boxed{\frac{\pi^2}{4}}$$

第７問

半無限区間　$0 \le x < +\infty$　において関数　e^{-x}　と関数　$e^{-x}\sin x$　に挟まれる領域の面積を求めよ。



$$S_t=\int_0^t e^{-x}(1-\sin x)\,dx$$

$$=\int_0^t e^{-x}dx-\int_0^t e^{-x}\sin x\,dx$$

$$=\left[-e^{-x}\right]_0^t-\left(-\frac{e^{-t}}{2}(\sin t+\cos t)+\frac{1}{2}\right)$$

$$=-e^{-t}+1+\frac{e^{-t}}{2}(\sin t+\cos t)-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{t\to\infty}S_t=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^t e^{-x}\sin x\,dx$$

$\sin x \to \cos x$
$e^{-x} \leftarrow -e^{-x}$

$$=\left[-e^{-x}\sin x\right]_0^t+\int_0^t e^{-x}\cos x\,dx$$

$$=-e^{-x}\sin t+\int_0^t e^{-x}\cos x\,dx$$

$\cos x \to -\sin x$
$e^{-x} \leftarrow -e^{-x}$

$$=-e^{-t}\sin t+\left[-e^{-x}\cos x\right]_0^t-\int e^{-x}\sin x\,dx$$

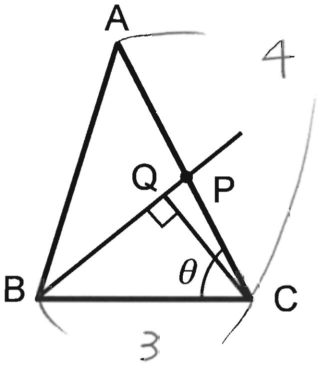
$$\int_0^t e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{e^{-t}}{2}(\sin t+\cos t)+\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

第 8 問

辺ACの長さが 4, 辺BCの長さが 3 の三角形ABCを考え，$\angle ACB=\theta$，$\overrightarrow{CA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{b}$ とおく。辺ACの中点をPとし，点Cから直線BPに垂線CQを引くとき，

$\overrightarrow{CQ}$ を θ と $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CB}$

$=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{CQ}=t\overrightarrow{CB}+(1-t)\overrightarrow{CP}$

$=t\vec{b}+(1-t)\frac{1}{2}\vec{a}$

$(0\leqq t\leqq 1)$

今、$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=0$ より

$\frac{1}{4}(1-t)|\vec{a}|^2+\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)\vec{a}\cdot\vec{b}$

$-t|\vec{b}|^2$

$4 \quad 3$

$=\frac{1}{4}(1-t)\cdot 16+\left(t-\frac{1}{2}\right)|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$-9t$

$=4-4t+(12t-6)\cos\theta-9t$

$=(-13+12\cos\theta)t-(-4+6\cos\theta)$

$=0$

$\Leftrightarrow t=\frac{6\cos\theta-4}{12\cos\theta-13}$

$\frac{1}{2}(1-t)=\frac{6\cos\theta-9}{12\cos\theta-13}\,\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\,\frac{2\cos\theta-3}{12\cos\theta-13}$

$$\boxed{\overrightarrow{CQ}=\frac{3}{2}\,\frac{3-2\cos\theta}{13-12\cos\theta}\vec{a}+\frac{4-6\cos\theta}{13-12\cos\theta}\vec{b}}$$

第 9 問

Fig. 1 に示すベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて，Fig. 2 のような平行六面体 V_1 を作る。この平行六面体の各面の中心と 2 頂点を用いて，Fig. 3 のような六面体 V_2 を平行六面体 V_1 の内部に作る。$\vec{a} = (3, 1, 0)$，$\vec{b} = (2, 3, 1)$，$\vec{c} = (1, 1, 3)$ とするとき，V_2 の体積を計算せよ。

V_2 も平行六面体になる。

$$\vec{a'} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(3, 4, 4)$$
$$\vec{b'} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(4, 2, 3)$$
$$\vec{c'} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(5, 4, 1)$$

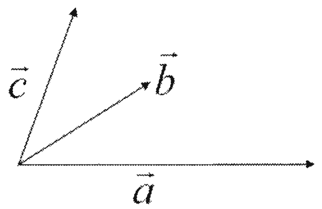


Fig. 1

$$V_2 = \left| \vec{a'} \cdot (\vec{b'} \times \vec{c'}) \right|$$
$$= \frac{1}{8} \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} \right|$$
$$= \frac{1}{8} \left| -30 + 44 + 24 \right|$$
$$= \frac{1}{8} \times 38 = \frac{19}{4}$$

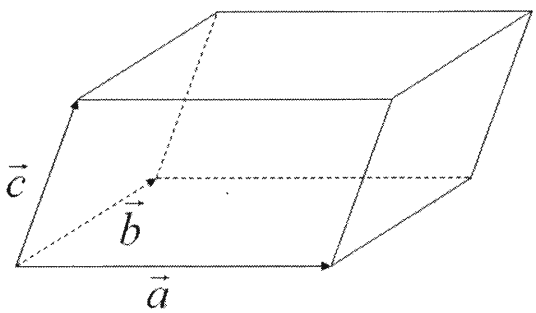


Fig. 2

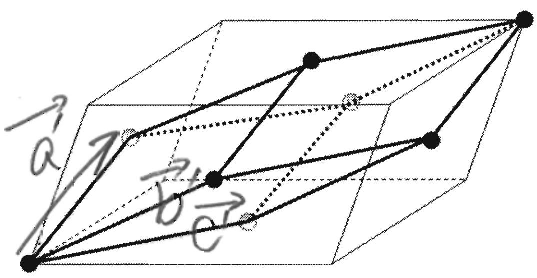


Fig. 3

$$\boxed{\frac{19}{4}}$$

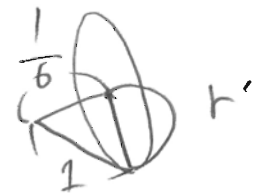
第 10 問

球面 S_1： $x^2+y^2+z^2=1$ と球面 S_2： $x^2+y^2+z^2+4x-4y+2z+1=0$ が交わる円の面積を求めよ。

S_1とS_2の交面は π:$4x-4y+2z+1=0$

S_1の中心は原点だから平面πとの距離は、

$$\frac{|1|}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}}=\frac{1}{6}$$



$$r'=\sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{35}}{6}$$

よって面積は $\frac{35}{36}\pi$

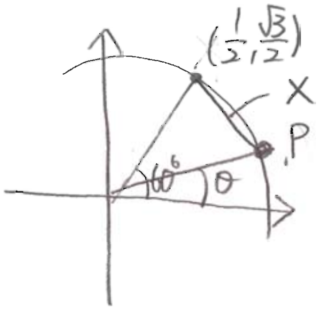
$$\boxed{\frac{35}{36}\pi}$$

第 11 問

点 P は円: $x^2+y^2=1$ の周上の任意の位置をランダムに占めることができるものとする。今，変数 X は，点 P と点 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ の距離を表すものとする。変数 X の平均値を求めよ。

$x^2+y^2=1$ 上の点を $(\sin\theta, \cos\theta)$ とする。$(0 \leqq \theta < 2\pi)$

このとき $\theta = t$ となる確率は $\frac{1}{2\pi}$



このとき 余弦定理より

$$X^2 = 1^2+1^2-2\cos(60°-\theta)$$

$$= 2(1-\cos(60°-\theta))$$

$$X = \sqrt{2(1-\cos(60°-\theta))}$$

ここで、 $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$ より $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$X = 2\left|\sin\frac{60°-\theta}{2}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)\right|$$

$$E(X) = \int_0^{2\pi} X(\theta)\, f(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{2\pi}\left|\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi} \left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)\right) d\theta \right)$$

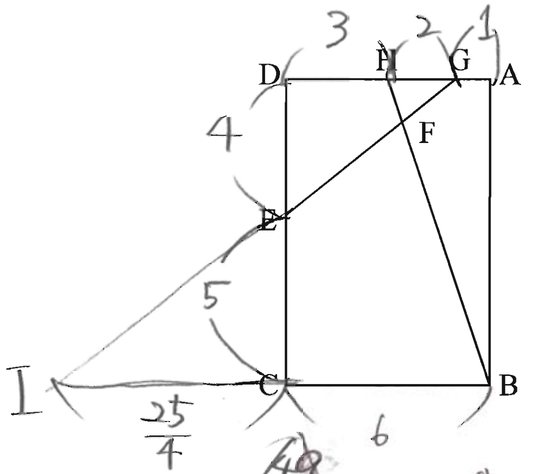
$$= \frac{1}{\pi}\left\{ 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi} \right\}$$

$$\boxed{\frac{4}{\pi}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\right) = \frac{4}{\pi}$$

第 12 問

図に示す長方形 ABCD 中の四角形 EFBC の面積を求めよ。ただし, 辺の長さは, AG = 1, GH = 2, HD = 3, DE = 4, EC = 5 である。



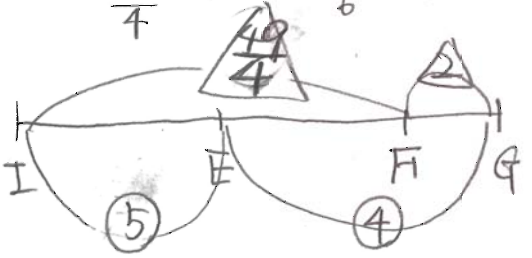
GEを延長して左図のように点Iをつくる。

$\triangle EDG \backsim \triangle ECI$ より

$IC = 5 \times \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$

$IB = \frac{25}{4} + 6 = \frac{25+24}{4} = \frac{49}{4}$

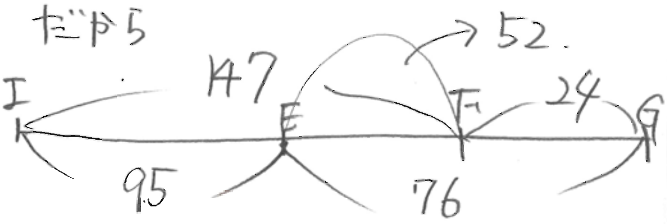
ここで線分IGに注目すると



49 : 8 と 5 : 4

で 57と9の最小公倍数は171

だから



よって $EF : FG = 52 : 24$

$= 13 : 6$

$\triangle HFG = \triangle DEG \times \frac{2}{5} \times \frac{6}{19}$

$= 4 \times \cancel{5} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{5}} \times \frac{6}{19}$

$= \frac{24}{19}$

求める面積をSとすると、

$S = \square ABCD - \triangle DEG - \triangle ABH + \triangle HFG$

$= 54 - 10 - \frac{27}{2} + \frac{24}{19}$

$= \frac{88-27}{2} + \frac{24}{19} = \frac{61}{2} + \frac{24}{19}$

$= \frac{1159+48}{38} = \frac{1207}{38}$

$\boxed{\frac{1207}{38}}$

第 13 問

図の 4×4 のマス目に 1 から 16 の数字を，縦，横，対角線の和がすべて同じになるように置く。このとき，A，B を求めよ。

4		15	B
5	11	Y	X
9 ②	7	6 ①	12
16 A			13

1〜16の和は

$$\frac{1}{\cancel{2}} \times (1+16) \times \overset{8}{\cancel{16}}$$

$$= 8 \times 17 = 136$$

$\frac{136}{4} = 34$ より

1列の和は34

①$+28=34$ より ①$=6$

②$+25=34$ より ②$=9$

$A+18=34$ より $A=16$

$$\begin{array}{rl} & B+X=9 \\ -) & B+Y=11 \\ \hline & X-Y=-2 \end{array}$$

また $X+Y=34-16=18$

より $2X=16$ ∴$X=8$

$-2Y=-20$ ∴$Y=10$

$B=1$

$A=16$

$B=1$

☆ド・モアブルの公式

$(\cos x + i \sin x)^n$

$= \cos nx + i \sin nx$

第 14 問

$$\left(\sqrt{3}i-1\right)^{10}+\left(-\sqrt{3}i-1\right)^{10}$$

を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。

$12 = \frac{36}{3}$

$-1 \pm \sqrt{3}i = 2 \times \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

$= 2 \times \left(\cos\frac{4}{3}\pi \pm i \sin\frac{4}{3}\pi\right)$

$(-1+\sqrt{3}i)^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{40}{3}\pi + i\sin\frac{40}{3}\pi\right)$

$= 2^{10}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$

$= 2^{10}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

$(-1-\sqrt{3}i)^{10} = 2^{10}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

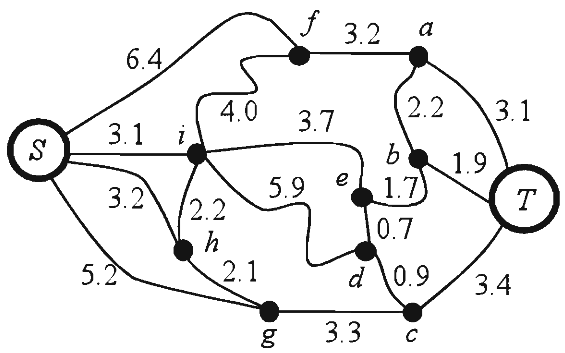
よって、$(\sqrt{3}i-1)^{10} + (-\sqrt{3}i-1)^{10} = -2^{10}$

$= -1024$

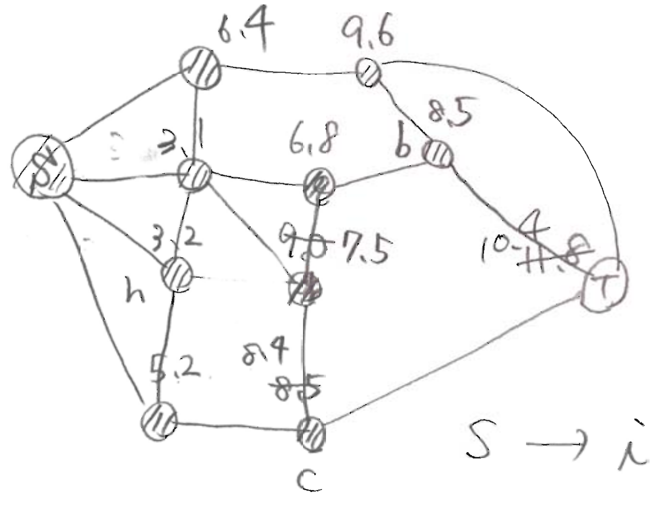
$\boxed{-1024}$

第 15 問

下図のグラフにおいて，S と T の間の最短経路を求めよ。ただし，枝の傍の数字は対応する枝の長さを示している。



ダイクストラ法.



$S \to i \to e \to b \to T$

$\boxed{10.4}$

第 16 問

次の虫食い算のＡに入る数字を求めよ。

$$
\begin{array}{r}
\square\square \\
\times\,\square\square 8 \\
\hline
\square\square\square \\
0\ 0\ \ \\
\square\square\ \ \ \ \\
\hline
1\square 6\,\mathrm{A}\square
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
①\ ② \\
③\ ④\ 8 \\
\hline
⑤\ ⑥\ ⑦ \\
0\ 0\ \ \\
⑧\ ⑨\ \ \ \ \\
\hline
1\ ⑩\ 6\ A\ ⑪
\end{array}
$$

まず、足し算だから、

⑧ = 9 , ⑥ = A, ⑦ = ⑪

がわかり ⑤ + ⑨ = 16

になるはず。

また、④ = 0

⑩ = 0

$$
\begin{array}{r}
①\ ② \\
\times\,③\ ④\ 8 \\
\hline
⑤\ A\ ⑦ \\
0\ 0\ \ \\
9\ ⑨\ \ \ \ \\
\hline
1\ 0\ 6\ A\ ⑦
\end{array}
$$

⑤ + ⑨ = 16 より ⑤ ≧ 7

① = 9 or 8

① = 8 とすると、

③ に入るものがない

よって、① = 9

③ = 1

$$
\begin{array}{r}
9\ ②^{2} \\
1\ ④\ 8 \\
\hline
7⑤\ 9A\ ⑦2 \\
0\ 0\ \ \\
9\ ②^{2}\ \ \ \ \\
\hline
1\ 0\ 6\ A\ ⑦\ 2 \\
9\ \ \ \
\end{array}
$$

99×8

= 792

より、⑤ = 7

② = 9

A = 9

9

第 17 問

P と Q を以下のように決める。P と Q は収束するものとする。

$$P = \sqrt{2 + 3\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + \cdots}}}}$$

$$Q = a + \cfrac{2}{a + \cfrac{2}{a + \cfrac{2}{a + \cdots}}}$$

$P = Q$ となるとき，a の値を求めよ。ただし，$a > 0$ とする。

$P = \sqrt{2 + 3P}$

が成り立つ

$P^2 = 2 + 3P$

$P^2 - 3P - 2 = 0$

$P = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

$P > 0$ より $P = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$

$Q = a + \dfrac{2}{Q}$ より

$Q^2 = aQ + 2$

$Q^2 - aQ - 2 = 0$

$Q = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2+8}}{2}$

$Q > 0$ より $Q = \dfrac{a + \sqrt{a^2+8}}{2}$

$P = Q$ より $a = 3$

$$\boxed{a = 3.}$$

第 18 問

分数において，分子に 4 個の数字の掛け算を，分母に 3 個の数字の掛け算をおこない，その結果が 1 になるとする。

$$\frac{\square\cdot\square\cdot\square\cdot\square}{\square\cdot\square\cdot\square}=1$$

$2^1\ 2^2\ 2^3\ 2^4\ 2^5\ 2^6\ 2^7$

このとき，分子と分母に 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 の 7 個の数字を 1 回だけ使うことを考える。この場合の 4 個と 3 個の組み合わせについて全て求めよ。

7個の数字は、すべて2のn乗

だから、条件をみたすのは、

$$\frac{2^{a+b+c+d}}{2^{e+f+g}}=1$$

となるとき。つまり $a+b+c+d=e+f+g$

となればよい。ここで、a〜gは1〜7を

1回ずつ使ってつくるわけだから

1〜7の和 $\frac{7}{2}\cdot 8=28$ より

$$\begin{cases} a+b+c+d=14 \\ e+f+g=14 \end{cases}$$

e,f,gを決める。$e<f<g$とすると、

$14=e+f+g>3e$

$e<\frac{14}{3}=4.6\sim$

また逆に $g>4.6\cdots$

だから $e=1,2,3,4$

$g=5,6,7$

1) $g=5$のとき

$e+f=9$ $e<f<4$より ×

2) $g=6$ $e+f=8$

$(g,e,f)=(6,\cancel{2,6})$ $\underline{(6,3,5)}$

3) $g=7$ $e+f=7$

$(g,e,f)=(7,1,6),(7,2,5)$

$(7,3,4)$

以上より

$(e,f,g)=(3,5,6),(1,6,7)$

$(2,5,7),(3,4,7)$の4通り

① (8, 32, 64) と (2, 4, 16, 128)

② (2, 64, 128) と (4, 8, 16, 32)

③ (4, 32, 128) と (2, 8, 16, 64)

④ (8, 16, 128) と (2, 4, 32, 64)

第 19 問

1 から 1000 までの自然数のうち 3 の倍数もしくは 3 がつく数はいくつあるか。

1〜1000のうち 3を使わないのは 9^3 個

そのうち 3の倍数は 1/3 (これは 0〜999)

$$10^3 - (\underbrace{\frac{2}{3} \times 9^3 + \overset{1000}{1}}_{\text{3が3の倍数がつかないもの}})$$

$= 1000 - (486 + 1)$

$= 513$

$\boxed{513}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
a b c d e f g h i j k l m n o p q r

第 20 問

19 20 21 22 23 24 25 26
s t u v w x y z

次の２つの例は，あるルールに基づいて作られた暗号である。

(49, 75, 113, 126, 129): key 37 = labor

(71, 45, 53, 67, 112, 82): key 31 = invest

このルールに基づくと，以下の暗号は何と読むことができるか？

(106, 112, 77, 107, 92, 71): key 29 = ???

keyは剰余に対応し、アルファベット1～26に対応させる。

例えば、

87

58

$49 \to 12$ l
$75 \to 1$ a
$113 \to 2$ b
$126 \to 15$ o
$129 \to 18$ r

mod37

$106 \to 19$ s
$112 \to 25$ y
$77 \to 19$ s
$107 \to 20$ t
$92 \to 5$ e
$71 \to 13$ m

mod29

$\boxed{\text{system}}$