受験番号 ____________________

東京大学大学院 工学系研究科 環境海洋工学専攻
平成 20 年度大学院 修士課程

「論理的思考能力を見るための数理的問題」
入学試験問題および解答用紙

平成 19 年 8 月 27 日 （月） 13:00～15:30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません．

2. 落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所を見出した場合には挙手し，試験監督者に伝えること．

3. このページの最上部の欄に受験番号のみ記入しなさい．それ以外の箇所に受験番号，氏名を書いてはいけません．

4. 問題は全部で 20 問あります．このうち任意の 15 問を選んで解答しなさい．**下の選択問題番号欄で，選択した問題の番号に○をつけなさい．**

5. それぞれの問題の下に解答の道筋を書き，四角の中に答を記入しなさい．

6. 計算用紙は別に配布します．

選択した問題の番号に○をつけなさい．16 問以上を選択し，解答することはできないので注意すること．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

第１問

次の微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-16y=0$ を，

x=0 における初期条件 y=1, $\dfrac{dy}{dx}$=12 のもとに解け．

$y=e^{\lambda x}$と仮定し、与えられた微分方程式に代入することにより、特性方程式 $\lambda^2-16=0$ を得る。

$\lambda=-4, 4$ だから、一般解は、

$$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{4x}\quad(C_1, C_2\text{は積分定数})$$

とかける。初期条件より

$x=0$のとき、 $C_1+C_2=1$ …①

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.-4C_1e^{-4x}+4C_2e^{4x}\right|_{x=0}=-4C_1+4C_2=12$ …②

② ⇔ $-C_1+C_2=3$ …③

① + ③ より $2C_2=4$ ∴ $C_2=2$

① に代入して $C_1=-1$

以上より $\underline{y=-e^{-4x}+2e^{4x}}$ …（答）

◎特性方程式が虚数解のとき（$\lambda=p\pm qi$）

$$y=e^{px}(C_1\cos qx+C_2\sin qx)$$

特性方程式が重解のとき、（$\lambda=\lambda$）

$$y=(C_1x+C_2)e^{\lambda x}$$

第 2 問

次の行列 A を，対称行列 R $(R = R^{\mathrm{T}})$ と交代行列 S $(S = -S^{\mathrm{T}})$の和で表せ．
ここで，R^{T}，S^{T} は，それぞれ R，S の転置行列を意味する．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \\ -3 & 11 & -4 \end{bmatrix}$$

まず $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -4 & 0 & 11 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ だから $A + A^T = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 10 \\ -4 & 10 & -8 \end{bmatrix}$

ここで A を R と S を用いて、$A = R + S$ と表せたとすると、

$$A^T = (R+S)^T = R^T + S^T = R - S$$

$$\begin{cases} A = R + S \cdots ① \\ A^T = R - S \cdots ② \end{cases} \text{より} \quad \begin{array}{l} ①+② \iff R = \frac{1}{2}(A + A^T) \\ ①-② \iff S = \frac{1}{2}(A - A^T) \end{array}$$

よって、

$$\left.\begin{array}{l} R = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 10 \\ -4 & 10 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \\ S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -10 & 2 \\ 10 & 0 & -12 \\ -2 & 12 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & -6 \\ -1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \cdots (答)$$

◎行列の積の転置
$(AB)^T = B^T A^T$

cf. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$(A^T)^T = A$

第３問

（１） 656 のすべての正の約数はいくつあるか？また，すべての正の約数の和を求めよ．ただし，「すべての正の約数」とは，1 および 656 を含むものとする．

（２） 2^n-1 が素数ならば，$2^{n-1}(2^n-1)$ のすべての正の約数の和は，$2^n(2^n-1)$ になることを証明せよ．ただし，「すべての正の約数」とは，1 および $2^{n-1}(2^n-1)$ を含むものとする．

(1) 656を素因数分解すると、

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 656 \\
2 & 328 \\
2 & 164 \\
2 & 82 \\
 & 41
\end{array}
$$

$$656 = 2^4 \times 41$$

ここで、656の約数は素因数の選び方だけある $(1+4)\times(1+1)=10$ 個 その和は、

$$(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4)(41^0+41^1)$$
$$=(1+2+4+8+16)(1+41)=31\times42=\underline{1302}\text{（答）}$$

(2) (1)と同様に $2^{n-1}(2^n-1)$ のすべての約数の和は、

$$(1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})(1+(2^n-1))$$
$$=\frac{1-2^n}{1-2}\cdot 2^n = 2^n(2^n-1)$$

以上により題意は示された…（証明終）

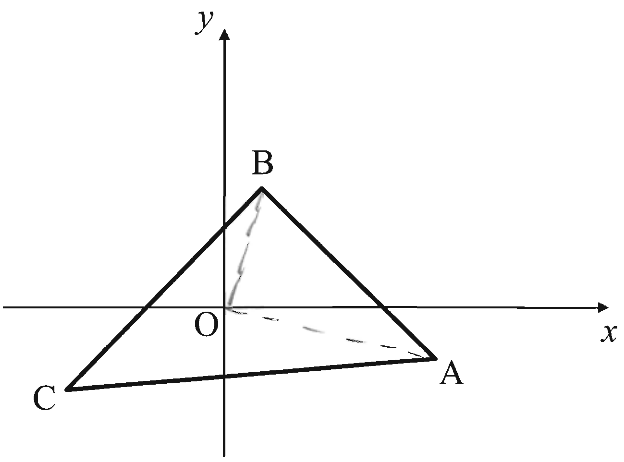
第 4 問

下図に示す３角形を一次変換

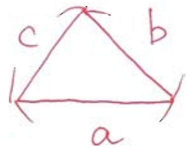
$$f:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって変換するとき，面積が不変であることを示せ.

注意：上記の一次変換は原点 O を中心とした角度 θ の回転変換と解釈できる．しかし，「回転変換であるので面積は不変であるのは明らかである」という解答は正答とみなさい.



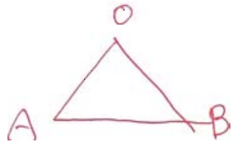
cf. ヘロンの公式



$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ベクトルを用いたとき.



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

$S = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

※次ページの解答欄に解答しなさい.

第4問（解答欄） 点Aを(x_1, y_1)，点Bを(x_2, y_2)とする。

△OABの面積Sは $S=\dfrac{1}{2}|x_2y_1-x_1y_2|$ となる。

ここで、点A，Bを回転させた点をA',B'とするとき、

$$A'(x_1\cos\theta-y_1\sin\theta,\ x_1\sin\theta+y_1\cos\theta)$$
$$B'(x_2\cos\theta-y_2\sin\theta,\ x_2\sin\theta+y_2\cos\theta)$$

となるので、△OA'B'(点Oは回転させても不変)をS'とすると、

$$S'=\frac{1}{2}\left|\cancel{x_1x_2\sin\theta\cos\theta}+x_1y_2\cos^2\theta-x_2y_1\sin^2\theta-\cancel{y_1y_2\sin\theta\cos\theta}\right.$$
$$\left.-\cancel{x_1x_2\sin\theta\cos\theta}+x_1y_2\sin^2\theta-x_2y_1\cos^2\theta+\cancel{y_1y_2\sin\theta\cos\theta}\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|x_1y_2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-x_2y_1(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\right|$$
$$=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=S$$

となる。△OBC，△OCAも同様に面積が不変であることが示せるので、それを合わせた△ABCは一次変換fに対し面積が変わらないことがわかる ---(証明終)

第５問

$f(x) = \left| \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right|$ のグラフを描き，最大値および最小値を求めよ．

$f(-x) = f(x)$ より偶関数だから $x \geqq 0$ で考える。

$$f(x) = \left| \frac{(x+1)(x-1)}{x^2+1} \right|$$

となるから、

1) $0 \leqq x < 1$ のとき $f(x) = \dfrac{-x^2+1}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(-2x) - 2x(-x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2x(x^2+1-x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

2) $x \geqq 1$ のとき、$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

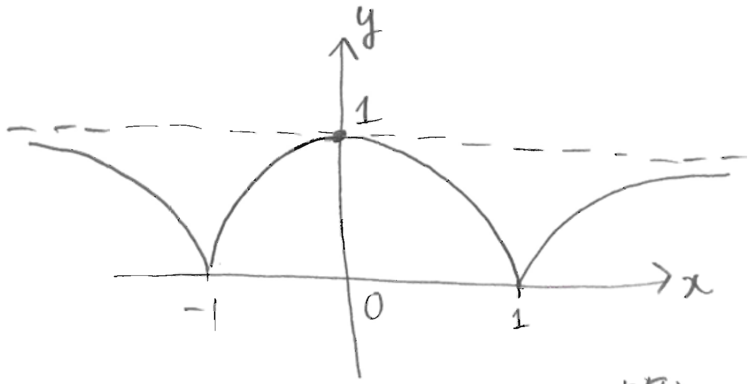
$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

また、$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

以上より $f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
f'	0	$-$	$\diagdown$	$+$
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

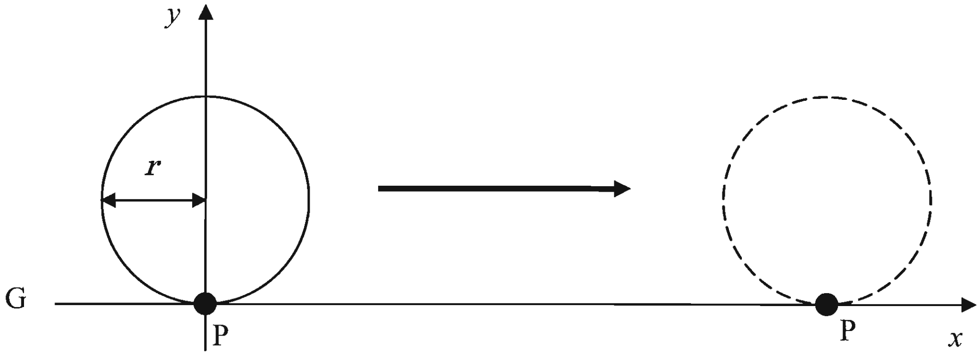
となり、$y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。

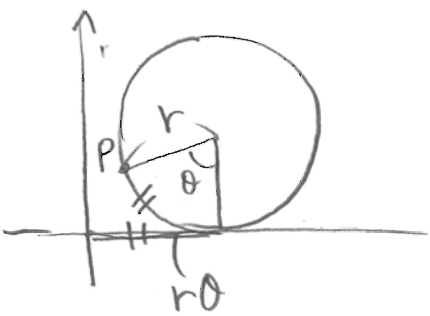


…（答）

第 6 問

半径 r の円が直線 G に点 P において接している．この円が直線 G 上をすべることなく一回転するとき，点 P が描く軌跡と直線 G で囲まれる領域の面積を求めよ．





左図のように θ をとると、θ が 0〜2π まで動くと考えればよい。

今
$$\begin{cases} x = r\theta - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r - r\cos\theta = r(1-\cos\theta) \end{cases}$$

とかけるので、求める面積を S とすると、

$$S = \int_0^{2\pi} y \frac{dx}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} r(1-\cos\theta)\, r(1-\cos\theta)\, d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= r^2 \left[\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= r^2(2\pi + \pi) = \underline{3\pi r^2} \quad //$$

…(答)

第７問

次の表は，たて，よこ，ななめの数の合計がすべて同じ数になる．この表を完成せよ．

①	14	②
③	④	8
⑤	−2	⑥

④をxとおくと、一列の和は $14+x-2=12+x$

③ $=(12+x)-8-x=4$

①をaとおくと、 $a+4+⑤=12+x$ より

$⑤=8+x-a$

$⑤+(-2)+⑥=8+\cancel{x}-a-2+⑥=12+\cancel{x}$ より

$⑥=a+6$

a	14	②
4	x	8
8+x−a	−2	a+6

に注目して、

$2a+x+6=x+12$

$2a=6 \quad \therefore a=3$

$② = 12+x-a-14 = x-a-2 = x-5$

に注目して、 $8+x-a+x+x-5=3x-a+3=3x$

$3x=x+12$ より $x=6$

以上より

3	14	1
4	6	8
11	−2	9

…(答)

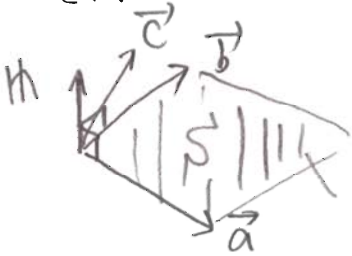
第 8 問

以下の問題にすべて答えよ．

（1）O を始点とするベクトル **a**，**b**，**c**，によってつくられる平行六面体の体積を，**a**，**b**，**c**，を用いて表しなさい．ただし，ベクトル積（外積）の記号×，スカラー積（内積）の記号・を用いてよい．

（2）四面体 ABCD がある．$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ をそれぞれ延長して，$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CG}=4\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DH}=5\overrightarrow{DA}$ となるように，点 E, F, G, H をとる．四面体 EFGH の体積の，四面体 ABCD の体積に対する比を求めなさい．

(1)



$$V=\left|\frac{\mathbf{h}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{h}|}\right|S=\frac{|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$$

$S=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$

$$=|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|$$

(2) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とするとき、

四面体ABCDの体積Vは $V=\frac{1}{6}|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d}|$

とかける。

ところで

外積について、$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$

- $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0$
- $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$

$$\begin{cases}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=0\\(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=0\end{cases}$$

☆方向
aをbの方向に回転させたときに右ねじの進む方向

第8問（続き）

~~第 9 問~~（解答欄）

$\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EH}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ で表す。

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{AB}$$
$$= 3\overrightarrow{BC} + \vec{b} - 2\vec{b} = 3(\vec{c} - \vec{b}) - \vec{b} = 3\vec{c} - 4\vec{b}$$

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CE} = 4\overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{AE} - \vec{c})$$
$$= 4(\vec{d} - \vec{c}) - 2\vec{b} + \vec{c} = 4\vec{d} - 3\vec{c} - 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{DE} = 5\overrightarrow{DA} - (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD})$$
$$= -5\vec{d} - (2\vec{b} - \vec{d}) = -4\vec{d} - 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EG} = (3\vec{c} - 4\vec{b}) \times (4\vec{d} - 3\vec{c} - 2\vec{b})$$
$$= 12\vec{c} \times \vec{d} - 6\vec{c} \times \vec{b} - 16\vec{b} \times \vec{d} + 12\vec{b} \times \vec{c}$$
$$= 18\vec{b} \times \vec{c} + 12\vec{c} \times \vec{d} - 16\vec{b} \times \vec{d}$$

$$(\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EG}) \cdot \overrightarrow{EH} = (18\vec{b} \times \vec{c} + 12\vec{c} \times \vec{d} - 16\vec{b} \times \vec{d}) \cdot (-4\vec{d} - 2\vec{b})$$
$$= -72(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{d} - 24(\vec{c} \times \vec{d}) \cdot \vec{b}$$
$$= -96(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{d}$$

よって、四面体EFGHは四面体ABCDの96倍

第９問

正多面体について，以下の設問に答えよ．ただし，正多面体の頂点の数（X），辺の数（Y），面の数（Z）との間には，X－Y＋Z＝2 の関係があるものとする．

（１）正多面体をすべてあげよ．なお，解答に至る過程も示せ．

（２）（１）で求めたそれぞれの正多面体について頂点の数，辺の数，面の形状をそれぞれ求めよ．

（３）それぞれの正多面体が半径１の球に内接するとき，球の体積に最も近い正多面体はどれか．なお，理由も付記せよ．

(1) 正多面体は、すべての面が合同な正多角形で、それぞれの頂点に集まる面の数は同じ
今、各面が m 角形で頂点に t 枚の面が集まっているとすると、

$$\underbrace{Y}_{\text{辺の数}} = m \times Z \times \frac{1}{2} = t \times X \times \frac{1}{2}$$

の関係がある。つまり、 $Z = \frac{2}{m}Y$, $X = \frac{2}{t}Y$

これを $X - Y + Z = 2$ に代入すると、

$$\frac{2}{t}Y - Y + \frac{2}{m}Y = 2$$

$$\Leftrightarrow Y\left(\frac{2}{t} - 1 + \frac{2}{m}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y}{mt}(2m - mt + 2t) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y}{mt}\{4 - (m-2)(t-2)\} = 2$$

よって、$(m-2)(t-2) < 4$ が必要

m, t, X, Y, Z がすべて正の整数であることに注意してまとめると、

m	t	X	Y	Z
3	3	4	6	4
3	4	6	12	8
4	3	8	12	6
3	5	12	30	20
5	3	20	30	12

(1) よって、以上の5種類
（正四面体，正六面体、正八面体
正十二面体、正二十面体）

(2) また それぞれ
正 Z 面体
… 頂点 X，正 m 角形

(3) 頂点の数が多い程、球に近いと考えられるので、

正十二面体

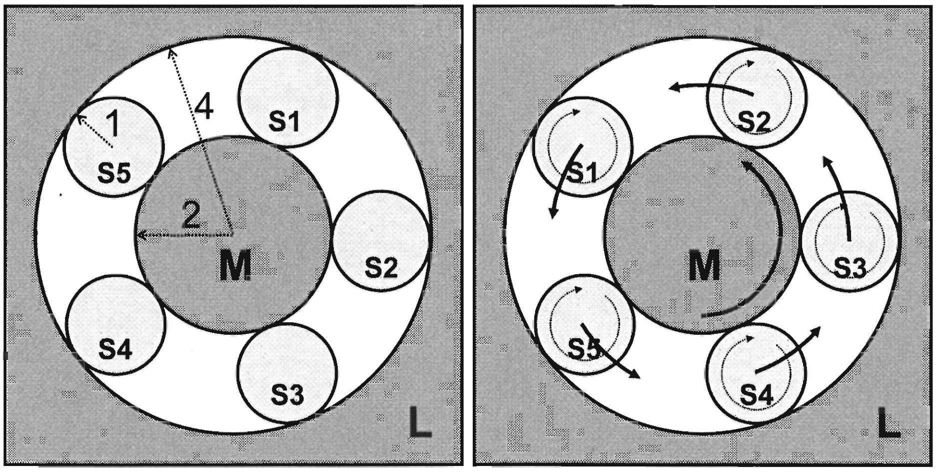
※次ページの解答欄に解答しなさい．

第 10 問

図１（a）に示すように，内部に半径４の円をもつ固定された物体Ｌがある．半径４の円の中心には半径２の円Ｍがあり，ＬとＭには半径１の５つの円（S1 ～S5）が挟まれている．Ｍを回転させると，S1 ～S5 はＬおよびＭの両方に接しながら滑ることなく転がるものとする．

図１（b）に示すように，Ｍを時計と反対回りに回転させると，S1 ～S5 は反時計回りに，Ｍのまわりを公転しながら時計回りに自転する．このとき，次の問いに答えよ．但し，５つの円（S1 ～S5）は互いに接しないで転がるとする．

（１）S1 が一回公転する間に，S1 はどれだけ自転するか？
（２）S1 が一回公転する間に，Ｍはどれだけ自転するか？



(a)　(b)

図１

円周の長さを考えて、

(1) $\underbrace{2\pi \times 4}_{L\text{の円周}} = \underbrace{2\pi \times 1 \times n}_{S_1\text{の円周}}$　$\therefore n = 4$

4回自転する。

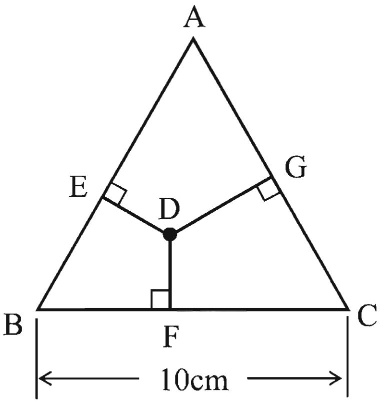
(2) $\underbrace{2\pi \times 1 \times 4}_{1\text{回公転するときの}S_1} = 2\pi \times 2 \times n'$　$\therefore n' = 2$

2回自転する。

※次ページの解答欄に解答しなさい．

第 11 問

1 辺の長さが 10cm の正三角形 ABC の内部において点 D をとり，この点 D から各辺に垂線を引き，垂線の足をそれぞれ E，F，G とする．ここで，点 D が正三角形 ABC の内部を動き回る時，その垂線の長さの和 $\overline{DE}+\overline{DF}+\overline{DG}$ がとりうる値の範囲を求めよ．



△ABC の面積は、$S = \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$

今、△DBC，△DCA，△DAB に注目すると垂線の長さは、それぞれの三角形の高さになるので、

$$\frac{1}{2} \times 10 \times (\overline{DE} + \overline{DF} + \overline{DG}) = S = 25\sqrt{3}$$

の関係がわかる。よって、

$$\overline{DE} + \overline{DF} + \overline{DG} = 5\sqrt{3} \text{（一定）}$$

第 12 問

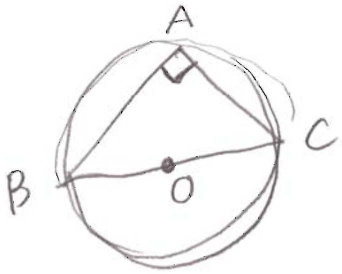
3 点（4, −1, 3）,（11, 0, 3）,（3, 6, −5）を通る円の面積を求めよ.

A(4, −1, 3), B(11, 0, 3), C(3, 6, −5)

とすると、

$\overrightarrow{AB} = (7, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 7, -8)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ より $\angle BAC = 90^\circ$



$\overrightarrow{BC} = (-8, 6, -8)$

$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (-4, 3, -4)$

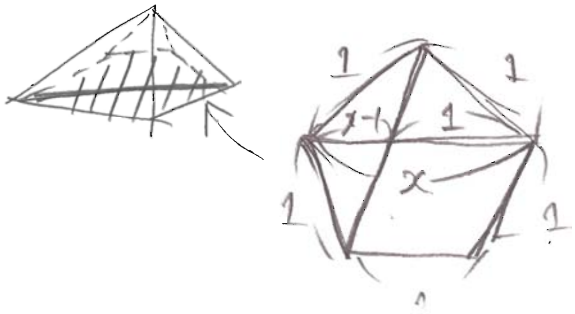
$|\overrightarrow{BO}| = \sqrt{16+9+16} = \sqrt{41}$

41π

第 13 問

正二十面体の隣り合う面の間の角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

正二十面体は、正三角形が1つの頂点に5つ集まってできる正多面体である。



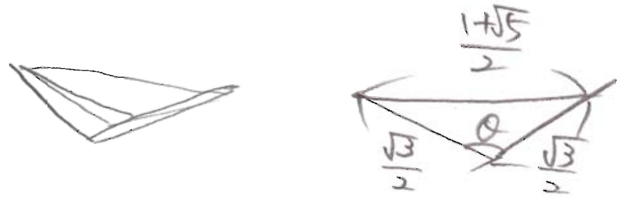
$$x-1 : 1 = 1 : x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

となりあう2つの面を横からみると、



よって、余弦定理より $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{3}{4} - 2\,\frac{3}{4}\cos\theta$

$$\frac{3}{2}\cos\theta = \frac{6}{4} - \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \cdots(\text{答})$$

第 14 問

以下の数字はある規則に従って並んでいる．（A）に入る値は何か．

$\pi/4$，$49\pi/36$，$17\pi/36$，$19\pi/12$，$25\pi/36$，（A），

$$\frac{9}{36}\pi \quad \frac{49}{36}\pi \quad \frac{17}{36}\pi \quad \frac{57}{36}\pi \quad \frac{25}{36}\pi \quad \boxed{?}$$

$+\frac{40}{36}\pi$ $+\frac{40}{36}\pi(?)$ $+\frac{40}{36}\pi$ $+\frac{40}{36}\pi(?)$

回転だと考えると、 $0 \sim 2\pi$.

よって、 $\frac{17}{36}\pi = \frac{49}{36}\pi + \frac{40}{36}\pi - 2\pi$ のようにつくられている。

$$(A) = \frac{25}{36}\pi + \frac{40}{36}\pi$$

$$= \frac{65}{36}\pi \quad (<2\pi)$$

$$\boxed{\frac{65}{36}\pi}$$

第 15 問

暦の上では一年は通常 365 日だが，実際の地球の公転周期はこれより少し長い．そのためグレゴリオ暦では以下のように閏年を設けて調整をしている．ここから求められる公転周期は何日になるか小数第 4 位まで求めよ．

- 4 年に 1 度 1 日増やす（閏年：2 月は 29 日）
- 各世紀の最後の年は 1 日増やさない（2 月は 28 日）
- 4 で割れる世紀の最後の年は 1 日増やす（2 月は 29 日）

$$365+\frac{1}{4}-\frac{1}{100}+\frac{1}{400}$$

$$=365+0.25-0.01+0.0025$$

$$=\underline{365.2425\ (\text{日})}$$ （答）

※ 3300年に 1日の誤差

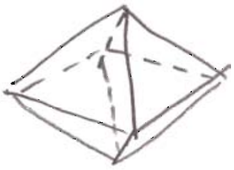
第 16 問

以下の問題にすべて答えよ．

（1）正八面体の各面に１～８の数字を１つずつ書き込んでできる八面体さいころは何種類できるか．ただし回転して同一になるものは同じとみなす．

（2）その中で，どの頂点についても，そこに会する４面につけられた数字の和が同一の値になるようなものがあるか．もしあれば，そのような配列の一例を示せ．

(1)



1面を固定して考える

その面に接する3面は回転に対して

対称なので、

$$\underbrace{7}_{\text{対面}} \times \underbrace{{}_6C_3 \times (3-1)!}_{\text{円順列}} \times \underbrace{3!}_{\text{残り3面}} = 1680$$

(通り)

(2) 1〜8まで1つずつあり、すべて4回ずつたされるから

総和は、 $4 \times (1+2+\cdots+8) = 4 \times \frac{1}{2}(1+8) \times 9$

$= 2 \times 9^2$

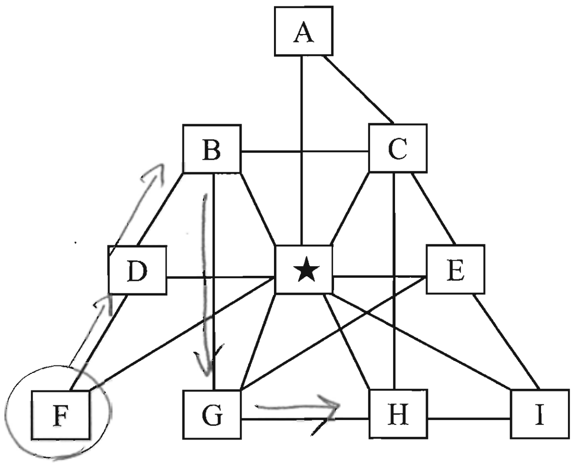
平均は、 $\frac{2 \times 9^2}{8}$ となるが、整数にならない。

したがって、このような配列はない。 …(終)

第 17 問

ある航空会社は★で示された都市に拠点を持ち，ここから 9 つの都市（A～I）をつなぐ以下の線で示されたような航空路線を持っている．このとき，★からスタートして，この航空会社のみを利用して各都市を一度だけ訪れるような順路をすべて示せ．

但し，方向は意味を持つものとする．例えば，A→B と B→A は意味が異なる．
解答は　★→A→B→C→D→E→F→G→H→I→★　のように記せばよい．



まず路線が2つしかないA,Fに注目する。一方は☆につながっていることを考えれば、A,Fは、スタートまたはゴールしかありえないので、Fをスタートとすると、

Cにいくと Aに行けなくなるので×

☆→F→D→B→G→H→I→E→C→A→☆

→E→I→H→C→A→☆

逆もOKなので全部で4通りある…(答)

第 18 問

ある会社が A, B 二つの製品を一つ作るときこれに必要な材料と燃料の組み合わせは下表のようになっている.

製品	材料		燃料	単価
	アルミ	プラスチック		
A	1	3	25	¥25,000
B	4	4	5	¥10,000
使用可能量	100	120	575	

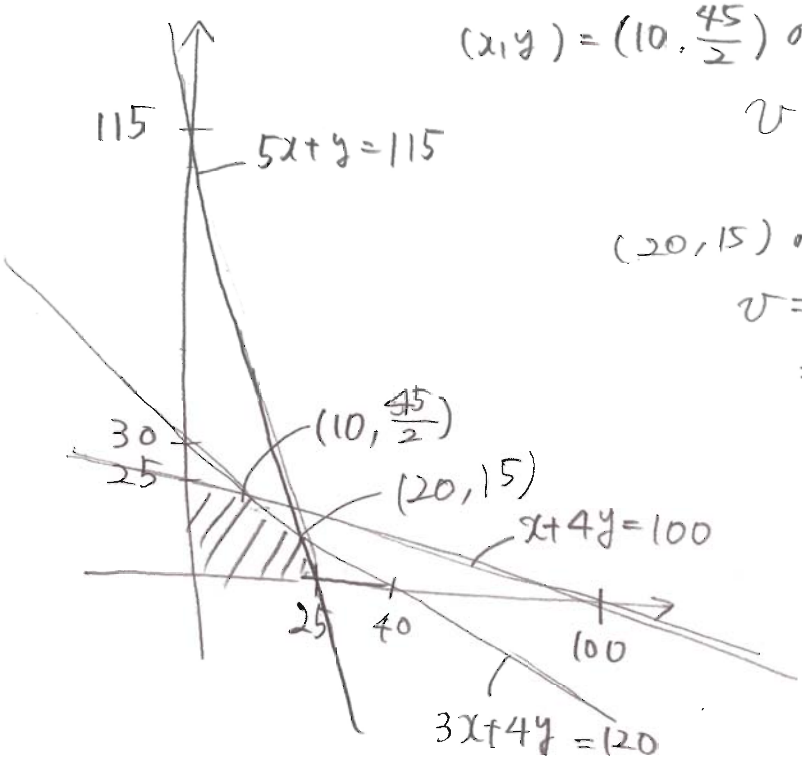
それぞれの材料と燃料の使用可能量と製品の単価が表に示されたとおりであったとき，売り上げを最大にするような A, B の生産量の組み合わせは何か.

製品A, Bの生産量を x, y とすると、

$$\begin{cases} x+4y < 100 \\ 3x+4y < 120 \\ 5x+y < 115 \end{cases}$$

の条件の下で $v = 25000x + 10000y$

を最大化すればよい



$(x, y) = (10, \frac{45}{2})$ のとき、

$v = 250000 + 225000$
$= 475000$

$(20, 15)$ のとき

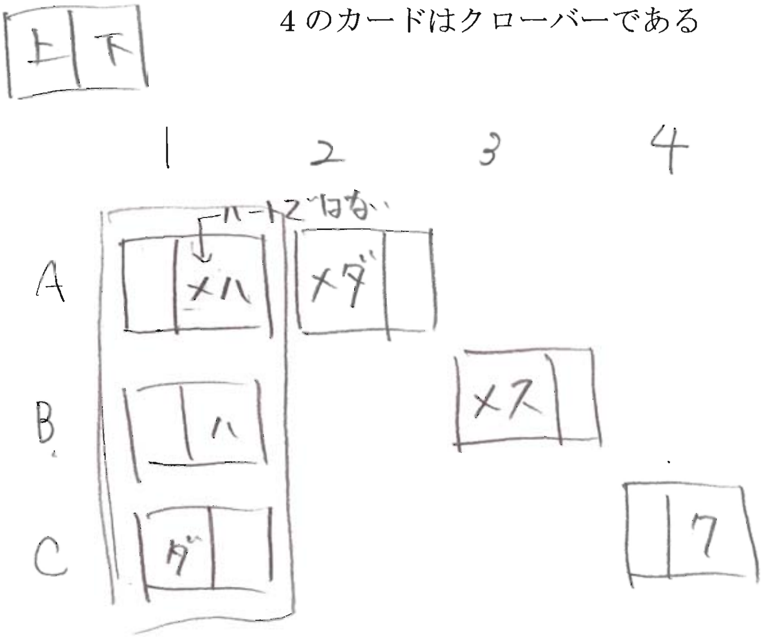
$v = 500000 + 150000$
$= 650000$ ◎

A : 20 コ
B : 15 コ

第 19 問

表（おもて）に 1～4 の数字が書かれている 4 枚のカードがある．カードの裏にはそれぞれ異なる絵柄（ダイア，スペード，ハート，クローバー）が描かれている．以下のように 3 人（A，B，C）が 2 つずつ証言をしている．各人の 2 つの証言のうち，1 つは正しく，1 つは間違っている．1～4 のカードの裏には何の絵柄が描かれているか答えよ．

A：2 のカードはダイアではない
　 1 のカードはハートではない
B：3 のカードはスペードではない
　 1 のカードはハートである
C：1 のカードはダイアである
　 4 のカードはクローバーである



1) Cの上が正しいとすると、
Cの下より 4はクローバーでない
しかしこのとき Aの下は
正しいことになるので、
Aの上は正しくないはず
だが、これは 4がダイヤ
であることに矛盾する。

2) Cの下が正しいとすると、4はクローバー
1はダイヤではない

2-1) Aの下が正しいとすると 2はダイヤ
1をスペード、3をハートとすると、OK

2-2) Aの下が正しくないとすると、
1はハートで 2はダイヤ
でない。
すると、Bの上より
3はスペードとなるが すると2に入るものがないので ×

1	2	3	4
スペード	ダイヤ	ハート	クローバー

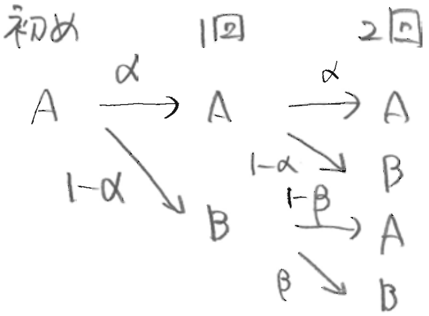
第 20 問

A 製品と B 製品の所有者が，次のように製品を買い換えるものとする．A 製品の所有者が，買い換えの際に，そのまま A 製品を選択する確率が $\alpha\ (0<\alpha<1)$，B 製品を選択する確率が $1-\alpha$，B 製品の所有者のうち，B 製品を選択する確率が $\beta\ (0<\beta<1)$，A 製品を選択する確率が $1-\beta$ である．このとき，次の問いに答えよ．

（1）初めに A 製品を所有していた人が 2 回目の買い換え後に B 製品を所有している確率を求めよ．

（2）初めに A 製品を所有していた人が n 回目の買い換え後に B 製品を所有している確率を求めよ．

(1)



よって、求める確率は

$$\alpha(1-\alpha)+(1-\alpha)\beta$$

$$=\underline{(1-\alpha)(\alpha+\beta)}$$

(2) n回目に A, B を所有している確率を $P_A(n)$, $P_B(n)$ とする

推移をまとめると、

$$\begin{pmatrix} P_A(n+1) \\ P_B(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_A(n) \\ P_B(n) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} P_A(0) \\ P_B(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix} \alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta \end{pmatrix}$ とすると $\det(A-\lambda E) = \lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha+\beta-1$

$$=(\lambda-(\alpha+\beta-1))(\lambda-1)$$

固有値 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=\alpha+\beta-1$

$$P=\begin{pmatrix} 1-\beta & 1 \\ 1-\alpha & -1 \end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{\alpha+\beta-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \alpha-1 & 1-\beta \end{pmatrix}$$

$$A^n=P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\frac{1}{\alpha+\beta-2}\begin{pmatrix} (\beta-1)+(\alpha-1)\lambda_2^n & (\beta-1)+(1-\beta)\lambda_2^n \\ (\alpha-1)-(\alpha-1)\lambda_2^n & (\alpha-1)+(\beta-1)\lambda_2^n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{(\alpha-1)\{1-(\alpha+\beta-1)^n\}}{\alpha+\beta-2}}$$