

受験番号 _____

東京大学大学院工学系研究科システム量子工学専攻
平成 19 年度大学院修士課程

「論理的思考能力を見るための数理的問題」

入学試験問題および解答用紙

平成 18 年 8 月 28 日（月）13:00～15:30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所を見出した場合には挙手し、試験監督者に伝えること。
3. このページの最上部の欄に受験番号のみ記入しなさい。それ以外の箇所に受験番号、氏名を書いてはいけません。
4. 問題は全部で 20 問あります。このうち任意の 15 問を選んで解答しなさい。
下の選択問題番号欄で、選択した問題の番号に○をつけなさい。
5. それぞれの問題の下に解答の道筋を書き、四角の中に答を記入しなさい。
6. 計算用紙は別に配布します。

選択した問題の番号に○をつけなさい。16 問以上を選択し、解答することはできないので注意すること。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

第1問

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + ay = \cos x$$

を、初期条件

$$x=0 \text{ のとき、 } y=0$$

のもとで解け。ただし、 a は正の定数とする。

同次方程式 $\frac{dy}{dx} + ay = 0$ の一般解は、

$$y = Ce^{-ax} \quad (C \text{ は任意の定数})$$

より、 $y = C(x)e^{-ax}$ とおいて代入する。(定数変化法)

$$y' = C'(x)e^{-ax} - aC(x)e^{-ax}$$

$$C'(x)e^{-ax} - aC(x)e^{-ax} + aC(x)e^{-ax} = \cos x$$

$$C'(x)e^{-ax} = \cos x$$

$$C(x) = \int e^{ax} \cos x dx$$

$$\begin{array}{l} e^{ax} \rightarrow ae^{ax} \\ \cos x \leftarrow \sin x \end{array}$$

$$= e^{ax} \sin x - \int ae^{ax} \sin x dx + A \quad \begin{array}{l} e^{ax} \rightarrow ae^{ax} \\ \sin x \leftarrow -\cos x \end{array}$$

$$= e^{ax} \sin x - a(-e^{ax} \cos x + a \int e^{ax} \cos x dx) + A$$

$$(1+a^2)C(x) = e^{ax}(\sin x + a \cos x) + A$$

$$C(x) = e^{ax} \frac{\sin x + a \cos x}{1+a^2} + A$$

$$\text{よって、 } y = \frac{\sin x + a \cos x}{1+a^2} + Ae^{-ax}$$

$$\text{初期条件より } 0 = \frac{a}{1+a^2} + A$$

$$\therefore A = -\frac{a}{1+a^2}$$

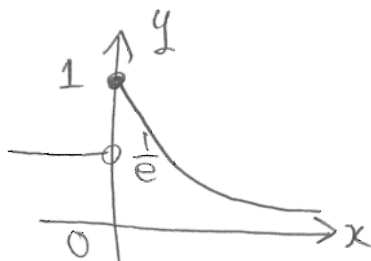
以上より

$$y = \frac{1}{1+a^2} (\sin x + a \cos x - ae^{-ax})$$

第2問

次のような関数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e} & (x < 0) \\ e^{-x} & (0 \leq x) \end{cases}$$



がある。このとき、関数

$$F(x) = \int_{x-a}^x f(t) dt$$

の最大値およびそのときの x を求めよ。ただし、 e は自然対数の底、 a は正の定数とする。

$$\text{i) } x < 0 \quad F(x) = \int_{x-a}^x \frac{1}{e} dt = \frac{a}{e}$$

$$\text{ii) } 0 \leq x < a \quad F(x) = \int_{x-a}^0 \frac{1}{e} dt + \int_0^x e^{-t} dt = \frac{a-x}{e} + (1 - e^{-x})$$

$$\text{iii) } x \geq a \quad F(x) = \int_{x-a}^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_{x-a}^x = e^{-x}(e^a - 1)$$

$$\text{ii) } F'(x) = -\frac{1}{e} + e^{-x} \quad F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{iii) } F'(x) = -(e^a - 1)e^{-x} < 0 \quad | \quad \textcircled{2} a > 1 \text{ のとき}$$

$F(x)$ の増減表は

① $0 < a \leq 1$ のとき

x	$\dots$	0	$\dots$	a	$\dots$
F'		0	$+$	$-$	
F		$\rightarrow \frac{a}{e}$	$\nearrow \text{Max}$	$\searrow$	

$x = a$ のとき

Max $1 - e^{-a}$

x	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	a	$\dots$
F'		0	$+$	0	$-$		
F		$\rightarrow \frac{a}{e}$	$\nearrow \text{Max}$	$\searrow$			

$x = 1$ のとき Max $\frac{a-1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = \frac{a+e-2}{e}$

$0 < a \leq 1$ のとき

最大値 $1 - e^{-a}$

$a > 1$ のとき

最大値 $\frac{a+e-2}{e}$

第3問

関数 $f(x) = x^n e^{-x}$ (n は2以上の整数であり一定) のグラフを $0 \leq x \leq 3n$ の範囲でスケッチせよ。特に、特徴的な点については定量的な情報も合わせて記すこと。

$$f(x) = x^n e^{-x}$$

$$f'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}$$

$$= e^{-x}(nx^{n-1} - x^n)$$

$$= x^{n-1}e^{-x}(n-x)$$

$$f''(x) = \dots = x^{n-2}e^{-x}\{(x-n)^2 - n\}$$

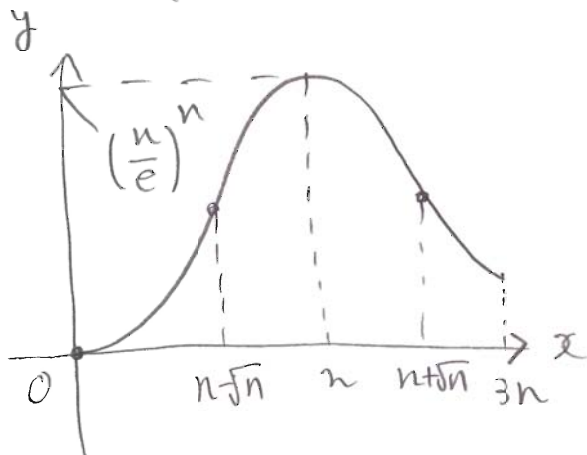
$$= x^{n-2}e^{-x}\{x - (n - \sqrt{n})\}\{x - (n + \sqrt{n})\}$$

x	0	...	$n - \sqrt{n}$	...	n	...	$n + \sqrt{n}$	...	$3n$	...	∞
f''		+	0	-	-	-	0	+	+	+	
f'		+	+	+	0	-	-	-	-	-	
f	0	↗	↗	↗	↘	↘	↘	↘	↘	↘	0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$f(n) = \frac{n^n}{e^n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$f(3n) = \frac{(3n)^n}{e^{3n}}$$



第4問

$mn - 3m - 2n = 0$ を満たす正の自然数 m, n の組をすべて求めよ。

$$mn - 3m - 2n = (m-2)(n-3) - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)(n-3) = 6$$

m, n は自然数だから

$$(m-2, n-3) = (1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2)$$

$$(m, n) = (3, 9), (8, 4), (4, 6), (5, 5)$$

$$(m, n) =$$

$$(3, 9), (4, 6), \\ (5, 5), (8, 4)$$

第5問

$S(x) = \frac{x^4}{2 \times 4} + \frac{x^6}{2 \times 4 \times 6} + \frac{x^8}{2 \times 4 \times 6 \times 8} + \dots$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $S(x)$ が満たす1階の微分方程式を求めよ。

(2) 上記の微分方程式を解いて $S(x)$ を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dx} S(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2 \times 4} + \frac{x^7}{2 \times 4 \times 6} + \dots$$

$$x S(x) + \frac{x^3}{2} = S'(x) \quad \text{よって} \quad S'(x) - x S(x) = \frac{x^3}{2}$$

(2) $S(x) = y$ とし、同次方程式 $y' - xy = 0$ を解くと、

$$y = C e^{\frac{1}{2}x^2} \quad (C \text{ は積分定数})$$

$y = C(x) e^{\frac{1}{2}x^2}$ とし、定数変化法でとく。

$$y' = C'(x) e^{\frac{1}{2}x^2} + x C(x) e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$C'(x) e^{\frac{1}{2}x^2} = \frac{x^3}{2}$$

$$C'(x) = \frac{x^3}{2} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$C(x) = \int \frac{x^3}{2} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad \begin{matrix} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{matrix}$$

$$= \int \frac{t}{2} \times x e^{-\frac{1}{2}t} \times \frac{dt}{2x}$$

$$= \frac{1}{4} \int t e^{-\frac{1}{2}t} dt \quad \begin{matrix} t \rightarrow 1 \\ e^{-\frac{1}{2}t} - 2e^{-\frac{1}{2}t} \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{4} \left(-2t e^{-\frac{1}{2}t} - 4e^{-\frac{1}{2}t} \right) + C'$$

$$= -\frac{1}{2} \left(t e^{-\frac{1}{2}t} + 2e^{-\frac{1}{2}t} \right) + C'$$

$$= -\frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{2} (x^2 + 2) + C'$$

以上より

$$y = -\frac{1}{2}(x^2 + 2) + C e^{\frac{1}{2}x^2}$$

第6問

$S_N = \sum_{n=0}^N x^n$ とする。 $x = i = \sqrt{-1}$ のとき、 S_N の大きさを求めよ。ただし、複素数

$z = a + bi$ の大きさは、 $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ と定義する。

$$S_0 = x^0 = 1 \quad |S_0| = 1$$

$$S_1 = x^0 + x^1 = 1 + i \quad |S_1| = \sqrt{2}$$

$$S_2 = 1 + i + (-1) = i \quad |S_2| = 1$$

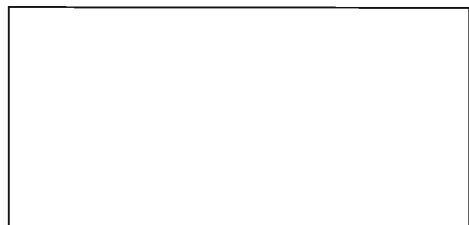
$$S_3 = 1 + i + (-1) + (-i) = 0 \quad |S_3| = 0$$

$$\because z^n \quad i^4 = 1 \quad \therefore i^{4n+k} = i^k \quad (0 \leq k \leq 3)$$

$$\begin{aligned} \text{と } S_3 = 0 \quad \therefore \quad S_{4n+k} &= n \sum_{n=0}^3 x^n + \sum_{n=0}^k x^n \\ &= n S_3 + S_k = S_k \end{aligned}$$

が成り立つ (n は自然数)

$$\text{よって} \quad |S_N| = \begin{cases} 1 & (N \equiv 0, 2 \pmod{4}) \\ \sqrt{2} & (N \equiv 1 \pmod{4}) \\ 0 & (N \equiv 3 \pmod{4}) \end{cases} \quad \dots (76)$$



第7問

$0 < x < 2m$ の範囲の値をとり得る確率変数 x の確率分布関数が、次の形で与えられている:

$$f(x) = -A(x^2 - 2mx)$$

以下の各問いに答えよ。ただし、 A, m は正の定数である。

(1) 確率分布関数を規格化あるいは正規化 (normalize) することによって、 A を定めよ。

(2) x の期待値 (母集団平均) が m になることを証明せよ。

(3) $(x - m)^2$ の期待値 (母分散) を求めよ。

(4) $x_1, x_2, \dots, x_n$ を確率変数 x の n 個の標本とする。標本平均 $\bar{x}$ を

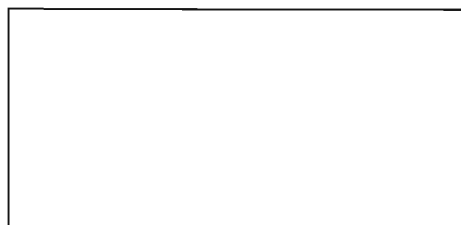
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

で定義する。 $\bar{x}$ の期待値もまた、 m となることを証明せよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_0^{2m} f(x) dx &= -A \int_0^{2m} (x^2 - 2mx) dx = -A \left[\frac{1}{3} x^3 - mx^2 \right]_0^{2m} \\ &= -A \left(\frac{8}{3} m^3 - 4m^3 \right) = \frac{4}{3} m^3 A \end{aligned}$$

$$\frac{4}{3} m^3 A = 1 \quad \therefore \quad A = \frac{3}{4m^3}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_0^{2m} x f(x) dx &= -A \int_0^{2m} (x^3 - 2mx^2) dx = -A \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} mx^3 \right]_0^{2m} \\ &= -A \left(4m^4 - \frac{16}{3} m^4 \right) = -\frac{3}{4m^3} \left(4m^4 - \frac{16}{3} m^4 \right) = m \end{aligned}$$



第7問 (積分)

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \int_0^{2m} (x-m)^2 f(x) dx \\
 &= \int_0^{2m} x^2 f(x) dx - m^2 \\
 &= -A \int_0^{2m} (x^4 - 2mx^3) dx - m^2 \\
 &= -A \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{2} m x^4 \right]_0^{2m} - m^2 = -A \left(\frac{32}{5} m^5 - 8m^5 \right) - m^2 \\
 &= -\frac{3}{\cancel{4}m^3} \times \left(-\frac{2}{5} m^5 \right) - m^2 = \frac{6}{5} m^2 - m^2 = \underline{\underline{\frac{1}{5} m^2}}
 \end{aligned}$$

$$(4) \quad E(x) = \int_0^{2m} x f(x) dx \quad \text{とある.}$$

$$E(ax+by) = aE(x) + bE(y)$$

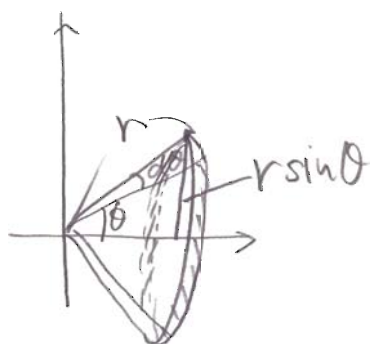
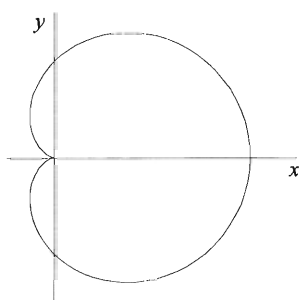
∵ $x_1, x_2, \dots, x_n$ は独立に同じ分布から得られるので

$$E(x_1) = E(x_2) = \dots = E(x_n)$$

$$\begin{aligned}
 E(\bar{x}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum x_i\right) = \frac{1}{n} \sum E(x_i) = \frac{1}{n} n E(x) \\
 &= \underline{\underline{m}}
 \end{aligned}$$

第8問

下図に示すカージオイド（心臓形）は極座標方程式 $r=1+\cos\theta$ で与えられる。これを x 軸の周りに回転させたときにできる立体の表面積 A を求めよ。



微小変位 $d\theta$ あり、の体積を考えると、



$$V = \int_0^\pi \frac{2}{3} \pi r^3 \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{3} \pi \int_0^\pi (1+\cos\theta)^3 \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{3} \pi \left[-\frac{1}{4} (1+\cos\theta)^4 \right]_0^\pi = \frac{2}{3} \pi - \frac{1}{4} 2^4 = \frac{8}{3} \pi$$



これは体積だった！

表面積は、

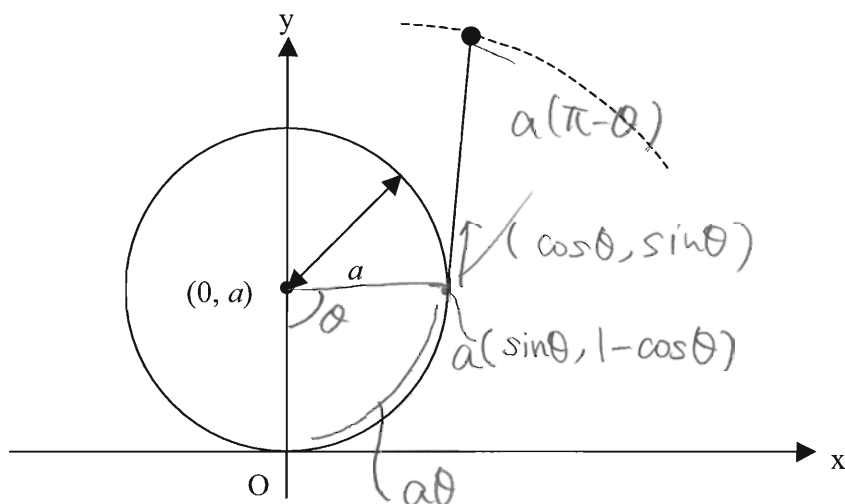
$$S = \int_0^\pi 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$$

$$= \dots = \frac{16}{3} \pi$$

$$\frac{16}{3} \pi$$

第9問

中心が $(0, a)$ 、半径 a の円に、原点に結ばれている長さ $a\pi$ の紐を巻きつける。このとき、紐の先端が描く曲線の長さを求めよ。ただし、第一象限のみ考える。



$$\begin{cases} x = a \sin \theta + a(\pi - \theta) \cos \theta \\ y = a(1 - \cos \theta) + a(\pi - \theta) \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a(\pi - \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= -a \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + a(\pi - \theta) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= a(\pi - \theta) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

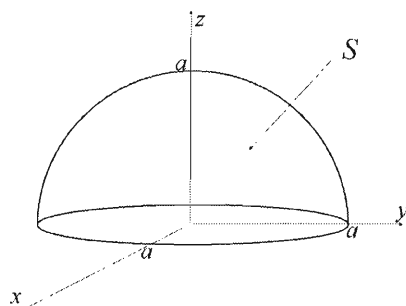
$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} d\theta = a \int_0^{\pi} (\pi - \theta) d\theta = a \left[\pi\theta - \frac{1}{2}\theta^2 \right]_0^{\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{2}a\pi^2}}$$

$$\frac{1}{2}a\pi^2$$

第 10 問

ベクトル A を $A = \begin{pmatrix} -y + xz \\ x + yz \\ z + xy \end{pmatrix}$ とし、開曲面 S を半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$)

とする。このとき、面積分 $\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS$ を求めよ。但し、 $\mathbf{n}$ は開曲面 S の外向き法線ベクトルである。



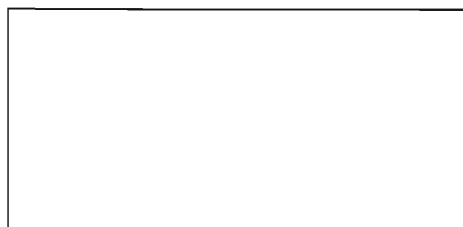
☆ 面積分 $\int_S p dy \wedge dz + q dz \wedge dx + r dx \wedge dy$

は、曲面 S のパラメータ表示 (u, v) は D を動く、

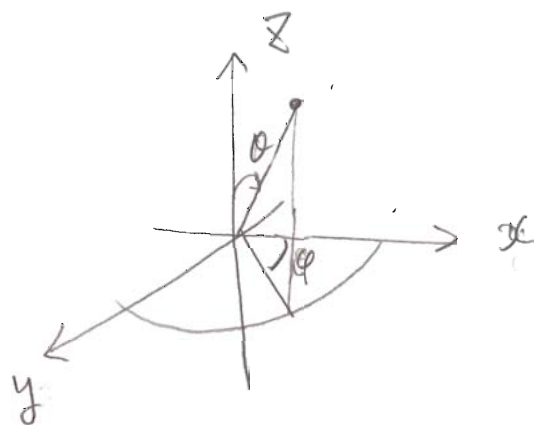
$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$$

$$\int_D \left\{ p \det \begin{pmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} + q \det \begin{pmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{pmatrix} + r \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right\} du dv$$

$$= \int_D \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \cdot \frac{(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} dS$$



第10問 (経度)

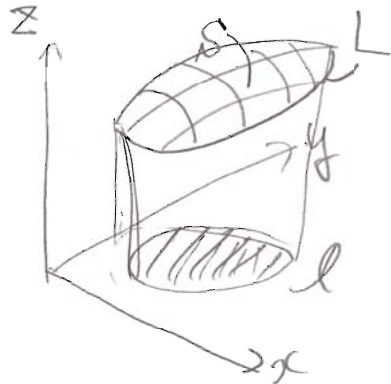


$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \sin \theta \cos \varphi \\ a \sin \theta \sin \varphi \\ a \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$|r_\theta \times r_\varphi| = a \sin \theta |r|$$

★ストークスの定理

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \frac{d\mathbf{S}}{|\mathbf{r}| dS} = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$



(解) L は S の境界 $(x, y, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$
 $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$

と可也。

ストークスの定理より

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \vec{n} dS = \oint_L \begin{pmatrix} -y+xz \\ x+yz \\ z+xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ (-y+xz) \frac{dx}{d\theta} + (x+yz) \frac{dy}{d\theta} + (z+xy) \frac{dz}{d\theta} \right\} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 d\theta = 2\pi a^2$$

第 11 問

以下の問いに答えよ。

(1) ある円に外接する正六角形と内接する正六角形の面積の比を求めよ。

(2) ある円に外接する正 n 角形と内接する正 n 角形の面積の比を求めよ。

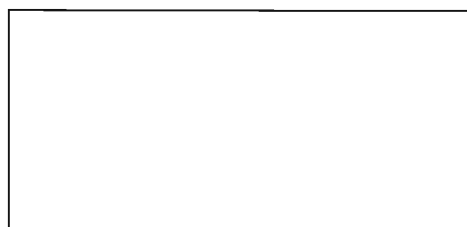
(1)



左図の部分 (正六角形の $\frac{1}{12}$) を切り出して考えると、
2つは相似なので、
相似比 $\tan 30^\circ : \sin 30^\circ$
 $= \frac{1}{\cos 30^\circ} : 1 = 2 : \sqrt{3}$
より 面積比は 4 : 3

(2) (1) と同様に、 $(30^\circ = \frac{2\pi}{n} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{n})$

よって、面積比は、 $1 : (\cos \frac{\pi}{n})^2$



第12問

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ と $3x^2 + 3y^2 - z^2 - 6z - 9 \leq 0$ の両方を満たす領域の体積を求めよ。

平面 $z = t$ のときの断面を考えると、

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 - t^2 & \cdots \text{①} \\ 3x^2 + 3y^2 \leq (t+3)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq \frac{(t+3)^2}{3} & \cdots \text{②} \end{cases}$$

①式より $-3 \leq t \leq 3$ のとき、求める領域が存在する。

$$\text{②式より} \quad 9 - t^2 \leq \frac{(t+3)^2}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq t \leq 3$$

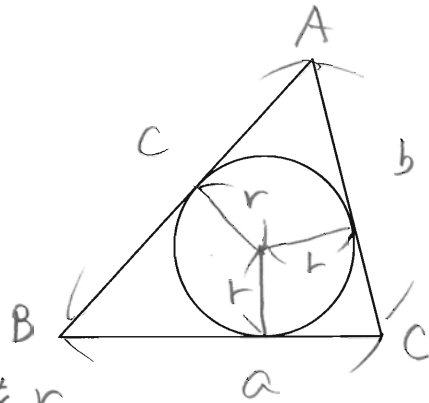
よって、

$$\begin{aligned} V &= \int_{-3}^{\frac{3}{2}} \pi \frac{(t+3)^2}{3} dt + \int_{\frac{3}{2}}^3 \pi (9 - t^2) dt \\ &= \pi \left(\left[\frac{(t+3)^3}{9} \right]_{-3}^{\frac{3}{2}} + \left[9t - \frac{t^3}{3} \right]_{\frac{3}{2}}^3 \right) \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{9} \left(\frac{9}{2} \right)^3 + \left(27 - 9 - \frac{27}{2} + \frac{9}{8} \right) \right\} \\ &= \frac{63}{4} \pi \end{aligned}$$

$$\frac{63}{4} \pi$$

第 13 問

円（面積 A ）に外接する三角形（面積 B ）の辺の長さの合計を求めよ．



円の半径を r ，

三角形の各辺の長さを上のように a, b, c とすると、

$$\pi r^2 = A \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)r = B$$

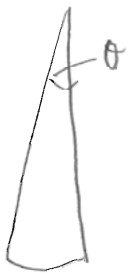
$$a+b+c = \frac{2}{r} B = \underline{\underline{2B\sqrt{\frac{\pi}{A}}}}$$

$$2B\sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

第 14 問

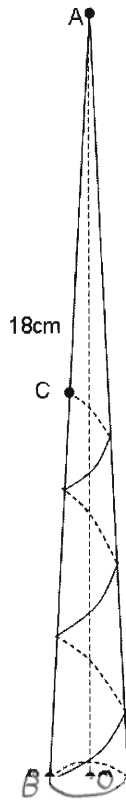
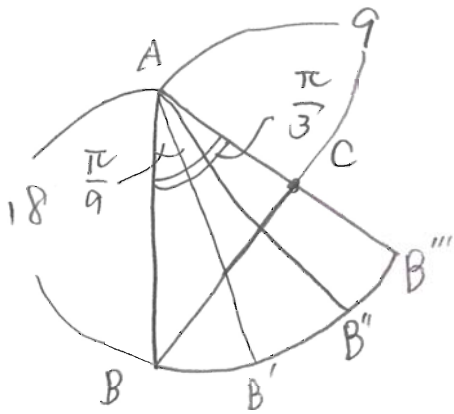
母線 AB の長さが 18cm、底面の半径が 1cm の円錐があり、AB の中点を C とする。点 B から円錐の側面上を 3 周して点 C に至る最短距離の長さを求めよ。

展開図は下ようになる



$$\theta = 2\pi \frac{1}{18} = \frac{\pi}{9}$$

3 周して C に行くから



$$9\sqrt{3}$$

第 15 問

下の表において、異なる正の自然数を 9 つのマス目に入れる。そして、各行、各列、各対角線に並ぶ 3 つの数字の積がすべて同じ値となるように自然数を選ぶものとする。このとき、 x の値を求めよ。

	1	2	3	
1	4	x	C	1
2	B	A	8	2
3	64	D	E	3

1 列目を考えると、

$$4 \times B \times 64 = B \times 2^8$$

2 行目を考えると、

$$B \times A \times 8 = B \times A \times 2^3$$

∴ 2^8 が等しいことより

$$A = 2^5$$

○ を考え

$$4 \times 2^5 \times E = 64 \times D \times E$$

$$2^7 = 2^6 D$$

$$D = 2$$

$$x \times A \times D = 2^{14}$$

$$x \times 2^5 \times 2^1 = 2^{14}$$

$$x = 2^9$$

△ を考え

$$2^6 \times 2^5 \times C = C \times 2^4 \times E$$

$$E = 2^7$$

よって、

$$4 \times A \times E = 2^{2+5+7} = 2^{14}$$

$$2^9 = 512$$

以下の計算が成り立つとき、 $A \times D - B \times C$ を求めよ。ただし、 A, B, C, D は1から9までの自然数である。

第17問

暗号文「970」は「○□△☆×」、「2220」は「△□△☆×」、「2930」は「☆△□○×」で表される。このとき、「781」はどのように表されるか。

記号の種類は ○ □ △ ☆ × の5つ

これを5進法で表したときの0~4に対応する

とすると、

$$970 \equiv 12340$$

$$\quad \quad \quad \text{○□△☆×}$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 970} \\ 5 \overline{) 194} \dots 0 \\ 5 \overline{) 38} \dots 4 \\ 5 \overline{) 7} \dots 3 \\ 1 \dots 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 781} \\ 5 \overline{) 156} \dots 1 \\ 5 \overline{) 31} \dots 1 \\ 5 \overline{) 6} \dots 1 \\ 1 \dots 1 \end{array}$$

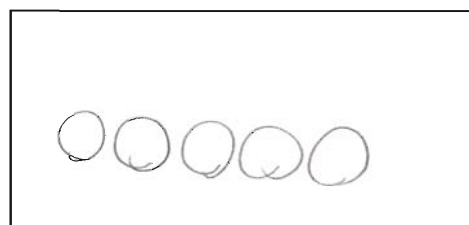
$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 2220} \\ 5 \overline{) 444} \dots 0 \\ 5 \overline{) 88} \dots 4 \\ 5 \overline{) 17} \dots 3 \\ 3 \dots 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 2930} \\ 5 \overline{) 586} \dots 0 \\ 5 \overline{) 117} \dots 1 \\ 5 \overline{) 23} \dots 2 \\ 4 \dots 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \text{○ ○ ○ ○ ○} \end{array}$$

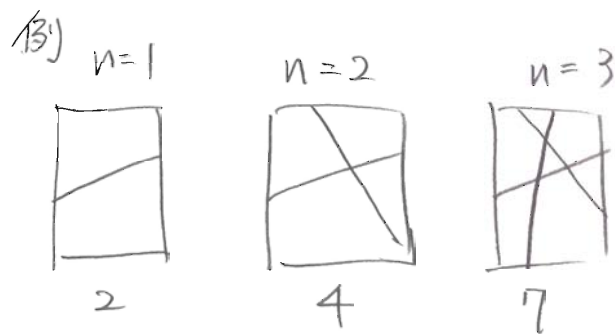
$$\begin{array}{c} 2 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 0 \\ \triangle \square \triangle \star \times \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \\ \star \triangle \square \text{○} \times \end{array}$$



第 18 問

ある長方形を n 本の直線でできるだけ多くの小片に分割する。その小片の数を求めよ。



ここで、直線を引くとき
直線と交わるたびに
小片が増える。

つまり $n+1$ 本目をひくとき
は n 本の直線と交わり、

長方形の辺に交わるのを 1 回
加えて、

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)$$

の関係がある。

$$S_{n+1} - S_n = n+1$$

よ、 $2, n \geq 2$ とする

$$S_n = S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}n(n-1) + (n-1) = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

$$\frac{n^2 + n + 2}{2}$$

第 19 問

A, B, C, D, E の 5 人のうち、常に本当の事を言う正直者は 2 名だけである。残り 3 名は嘘つきであり、その言葉には嘘と本当が混ざっている。誰が嘘つきかという問いに対する 5 名の以下の返答をもとに、どの 2 名が正直者であるかを判断し、推論の過程を示せ。

- A: 「C と D は嘘をつかない」
B: 「C は嘘つきだ」
C: 「D は嘘つきだ」
D: 「E は嘘つきだ」
E: 「B と C は嘘つきだ」

$f(x)$: x が正直者 とする。

A が正直者 とすると、A, C, D 3 人が正直者となり矛盾。

したがって $\neg f(A)$

E が正直者 とすると $f(E) \rightarrow \neg f(B) \wedge \neg f(C)$

より $\neg f(A)$ と合わせて D は正直者となるが、これにより

$f(D) \rightarrow \neg f(E)$ となり $f(E)$ に矛盾。

したがって $\neg f(E)$

最後に、B, C, D のうち 2 人は正直者で、矛盾がないのは、

B, D

以上より

正直者は B と D



第 20 問

以下の(A)に入る数字は何か？

64→28→68→76→50→(A)→2→4→16→38→70

$$64 \rightarrow 2 \times 6 + 4^2 = 12 + 16 = 28$$

$$28 \rightarrow 2 \times 2 + 8^2 = 68$$

$$76 \rightarrow 2 \times 7 + 6^2 = 14 + 36 = 50$$

$$50 \rightarrow 2 \times 5 + 0^2 = 10$$

つまり、10の位を2倍し？

1の位を2乗すればいい。

10