数学１A（佐々）　試験問題（2008.3.3）

１．次の問に答えよ。

（１）$\dfrac{dy}{dx} = x(y^2-1)$ の一般解を求めなさい。

（２）$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y}{x}$ の一般解を求めなさい。

（３）線分 $C: y = x(0 \le x \le 1)$ に対する線積分 $\displaystyle\int_C xy\ ds$ の値を求めなさい

（４）３次元空間 (x,y,z) で定義されたスカラー場: $\phi = x^2+y^2+z^2$ とベクトル場: $\boldsymbol{A} = (x+y-z, -x+y+z, x-y+z)$ に対し、(a) $\mathrm{grad}\phi$、(b) $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$、(c) $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ を求めなさい。

２．次の微分方程式の一般解を求めよ。

（１）$\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = \sin x$

（２）$\dfrac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$

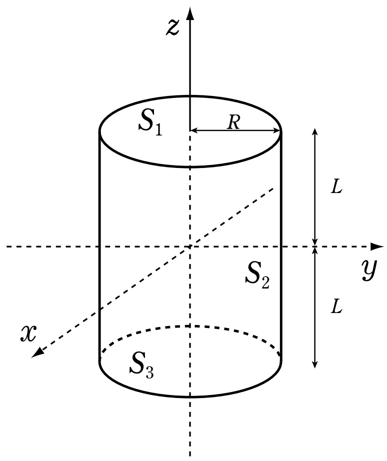
３．下図のように、半径 R、高さ $2L$ の円柱があり、上面、側面、下面をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とする。また、この S_1, S_2, S_3 上で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}\ \left(\boldsymbol{r} = (x,y,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z),\ |\boldsymbol{r}| = \sqrt{r^2+z^2}\right)$$

とする。以下の問に答えよ。

（１）S_1 上 $[S_1 : \boldsymbol{r}(r,\varphi) = r\cos\varphi\boldsymbol{i} + r\sin\varphi\boldsymbol{j} + L\boldsymbol{k}]$ の
面積分 $Q_1 = \displaystyle\iint_{S_1}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^R rdr\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{L}{[r^2+L^2]^{\frac{3}{2}}}$ を求めよ。

（２）同様にして S_2 上の面積分 $Q_2 = \displaystyle\iint_{S_2}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$ と S_3 上の面積分 $Q_3 = \displaystyle\iint_{S_3}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$ を求め、$Q_1+Q_2+Q_3 = 4\pi$ であることを示せ。［ヒント：S_2 上で $d\boldsymbol{S} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)Rd\varphi dz$］



４．積分汎関数 $\mathbf{I}[y] = \displaystyle\int_0^1 (y'^2+y^2)dx$ に対する停留値問題を考える $[0 \le x \le 1]$。ここで、y に対する境界条件は $y(0)=1, y(1)=0$ とする。以下の問に答えよ。

（１）この問題に対する Euler 方程式を導き、y および $\mathbf{I}[y]$ の値を求めよ。

（２）試行関数: $y(x) = ax^2-(1+a)x+1[a$ はパラメター$]$ を用いて、直接法から a を適当に選び $\mathbf{I}[y]$ の停留値の近似値を求めよ。

解答例（略解）…正答であるという保障はありません

1.（1）$y = -\dfrac{Ce^{x^2}+1}{Ce^{x^2}-1}$（$C$ は積分定数）

（2）$y = Cx^2 - x$（C は積分定数）

（3）$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

（4）(a) $2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) = (2x, 2y, 2z)$

(b) 3

(c) $-2(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) = (-2,-2,-2)$

2.（1）特性方程式の解が -1（重解）だから、斉次の解は $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$（$C_1, C_2$ は積分定数）。
特殊解を未定係数法で決めて、一般解は $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} - \dfrac{1}{2}\cos x$

（2）行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は、$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-2, -1, 1)$ であり、固有値それぞれに対する固有ベクトルは順に ${}^t(1,0,-1), {}^t(0,1,-1), {}^t(1,1,1)$
よって、$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x}$
（C_i は積分定数）

3.（1）$Q_1 = 2\pi L \displaystyle\int_0^R \frac{r}{(r^2+L^2)^{\frac{3}{2}}} dr = 2\pi L \left[-\frac{1}{(r^2+L^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^R = 2\pi - \frac{2\pi L}{\sqrt{R^2+L^2}}$

（2）ヒントより、$Q_2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-L}^{L} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz$ ここで、$z = R\tan\theta$ と置換すると $\tan\theta = \frac{L}{R}$ を満たす θ を α（$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$）として、

$$Q_2 = \cdots = 2\pi \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta d\theta = \frac{4\pi L}{\sqrt{R^2+L^2}}$$

また $Q_3 = Q_1$ なので、$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 4\pi$

4.（1）$f = y'^2 + y^2$ とすると、この問題の Euler 方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \Leftrightarrow y'' = y$$

となる。この Euler 方程式の一般解は、$y = C_1e^x + C_2e^{-x}$ であり、境界条件より $y = -\dfrac{1}{e^2-1}e^x + \dfrac{e^2}{e^2-1}e^{-x}$ となる。このとき、$\mathbf{I}[y] = \dfrac{e^2+1}{e^2-1}(\sim 1.313035..)$

（2）試行関数を使うと、$\mathbf{I}(a) = \dfrac{11a^2 - 5a + 40}{30}$ となる。
$\dfrac{d\mathbf{I}}{da} = 0$ を解いて、$a = \dfrac{5}{22}$。このとき、$\mathbf{I} = \dfrac{347}{264} \sim 1.314$