

問5：級数

2005年度問5

べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) (x+1)^n$ が収束するための実数 x の条件を求めよ。

2004年度問5

べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + n)(x-1)^n$ が収束するための実数 x の条件を求めよ。

2003年度問5(教科書演習問題 134 改)

べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x-2)^n$ が収束するような実数 x の上限を求めよ。

2002年度問5

べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x-1)^n$ が収束するための実数 x の条件を求めよ。

2001年度問5(教科書演習問題 133 改)

べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} (x-3)^n$ が収束するための実数 x の条件を求めよ。

1992年度問5(教科書演習問題 133)

べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} (x-1)^n$ が収束する x の範囲を求めよ。

演習問題：級数編

(教科書演習問題 135)

$n = 0, 1, 2, \dots$ に対し

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!(n+k)!}$$

と定義する。次の問に答えよ。

- (1) $g_n(x)$ は全ての実数 x に対して収束することを示せ。
- (2) $g_n(x)$ が微分可能であることを簡潔に示し, $g'_n(x)$ を $g_{n+1}(x)$ で表せ。

補足：テイラー展開 (前期)

級数の問題ですから使うことになる かもしれないので書いておきます。^{*1}

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots & (-\infty < x < \infty) \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots & (-\infty < x < \infty) \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots & (-\infty < x < \infty) \\
 \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + \dots & (-1 < x \leq 1) \\
 (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} + \dots & (-1 < x < 1 : \forall \alpha) \\
 & & (-\infty < x < \infty : \alpha \text{ は自然数})
 \end{aligned}$$

^{*1} 5つ目は、さらに $x=1$ は $\alpha > -1$ なら可, $x=-1$ は $\alpha > 0$ なら可ですが、そこまではいくらなんでも出ないでしょう。

2005 年度問 5

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^k \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 + \sum_{n=2}^k \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{k} \right) \leq 2$$

$$\text{よって } \forall n \text{ に対し } 1 \leq \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) \leq 2^{*2}$$

$$\text{以下 } b_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) (x+1)^n \text{ とすると}$$

$x \leq -2, 0 \leq x$ の場合

$|b_n| \geq 1 \cdot 1^n = 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ は 0 に収束しない。ゆえに級数は発散。

$-2 < x < 0$ の場合

$S_n = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n|$, $r = x+1$ として, $|r| < 1$ より

$$S_n < 2|r| + 2|r|^2 + \cdots + 2|r|^n < 2 \frac{|r|}{1-|r|}$$

よって単調増加数列 S_n は上に有界であるので収束する。

したがって $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は絶対収束する。ゆえに級数は収束。

$$\text{べき級数が収束} \Leftrightarrow -2 < x < 0$$

2004 年度問 5

$a_n = (2^n + n)$ として

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + n}{2^{n+1} + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{n}{2^n}}{2 + \frac{n+1}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ では $|x-1| < \frac{1}{2}$ 。ゆえに級数は収束。

$x < \frac{1}{2}, \frac{3}{2} < x$ では $|x-1| > \frac{1}{2}$ 。ゆえに級数は発散。

$x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ の場合

$b_n = (2^n + n)(x-1)^n$ とすると, この場合 $b_n = \pm \left(1 + \frac{n}{2^n} \right)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm 1$ と, 0 に収束しない。ゆえに級数は発散。

$$\text{級数が収束} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

2003 年度問 5

$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ として

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4$$

$-2 < x < 6$ では $|x-2| < 4$ 。ゆえに級数は収束。

$x < -2, 6 < x$ では $|x-2| > 4$ 。ゆえに級数は発散。

べき級数が収束する x の上限は 6

*2 前期を思い出しましょう。

2002 年度問 5

$a_n = \frac{n^n}{n!}$ として

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e^{*3}$$

$1-e < x < 1+e$ では $|x-1| < e$ 。ゆえに級数は収束。

$x < 1-e, 1+e < x$ では $|x-1| > e$ 。ゆえに級数は発散。

$x = 1 \pm e$ の場合

$$b_n = \frac{n^n}{n!} (x-1) \text{ とすると, この場合 } |b_{n+1}| = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} |b_n|$$

ここで

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) \cdot \frac{1}{k!} \quad *4$$

より $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ は n に対する単調増加数列。*5*6

よって $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ より

$|b_{n+1}| \geq |b_n|$ となり, $|b_n| \geq |b_1| = e$ となる。

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ は 0 に収束しない。ゆえに級数は発散。

$$\text{べき級数が収束} \Leftrightarrow 1-e < x < 1+e$$

2001 年度問 5

$a_n = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$ として

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$$

$1 < x < 5$ では $|x-3| < 2$ 。ゆえに級数は収束。

$x < 1, 5 < x$ では $|x-3| > 2$ より級数は発散。

$x = 1, 5$ の場合

$$b_n = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} (x-3)^n \text{ とすると}$$

$$\text{この場合 } b_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} > 1$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ は 0 に収束しない。ゆえに級数は発散。

$$\text{べき級数が収束} \Leftrightarrow 1 < x < 5$$

*3 e の定義は $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ で $n \rightarrow \infty$ の極限です。

*4 ここで $k! \geq 2^{k-1}$ を使うことで $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 3$ よ

り上に有界であることが示される。それと以下に示されている単調増加性より極限值 e の存在が証明される。

*5 前期の授業で習いました。

*6 各 k に対して, n が大きくなれば \sum の中身が大きくなる。さらに n が大きくなれば \sum で足す項の数が増える。

(2001 年度と同様にして)

べき級数が収束 $\Leftrightarrow -1 < x < 3$

教科書演習問題 135

$$(1) \quad a_k = (-1)^k \frac{x^k}{k!(n+k)!} \text{ として}$$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{x}{(k+1)(n+k+1)}$$

よって $\forall x$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 0$ より級数は収束.

$$(2) \quad g'_n(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'_n(x+h) - g'_n(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x+h)^k - x^k}{k!(n+k)!}$$

$$\text{分子の } (x+h)^k - x^k = khx^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}h^2x^{k-2} + \dots$$

は $h \rightarrow 0$ で khx^{k-1} のみが残る*7

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k-1}hk}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k-1}k}{k!(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)(-1)^{k-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!((k-1)+(n+1))!}$$

$$= - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!(k+n+1)!} = -g_{n+1}(x)$$

*7 h が 2 乗以上のものは無視できるということですが...厳密さに欠けますね. おまけなので大目に見てください.