問５：級数

2005 年度問 5
べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)(x+1)^n$ が収束するための実数 x の条件を求めよ.
2004 年度問 5
べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2^n+n)(x-1)^n$ が収束するための実数 x の条件を求めよ.
2003 年度問 5(教科書演習問題 134 改)
べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-2)^n$ が収束するような実数 x の上限を求めよ.
2002 年度問 5
べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-1)^n$ が収束するための実数 x の条件を求めよ.
2001 年度問 5(教科書演習問題 133 改)
べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}(x-3)^n$ が収束するための実数 x の条件を求めよ.
1992 年度問 5(教科書演習問題 133)
べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}(x-1)^n$ が収束する x の範囲を求めよ.

演習問題：級数編

(教科書演習問題 135)
$n=0,1,2\ldots$ に対し
$$g_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!(n+k)!}$$
と定義する．次の問に答えよ．
(1)　$g_n(x)$ は全ての実数 x に対して収束することを示せ.
(2)　$g_n(x)$ が微分可能であることを簡潔に示し，$g'_n(x)$ を $g_{n+1}(x)$ で表せ.

補足：テイラー展開 (前期)

級数の問題ですから使うことになる **かもしれない** ので書いておきます.[*1]

$$
\begin{array}{lll}
e^x & =1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots & (-\infty<x<\infty)\\
\sin x & =x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots & (-\infty<x<\infty)\\
\cos x & =1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots & (-\infty<x<\infty)\\
\log(1+x) & =x-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n!}+\cdots & (-1<x\le 1)\\
(1+x)^\alpha & =1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}+\cdots & (-1<x<1:\forall\alpha)\\
 & & (-\infty<x<\infty:\alpha\text{ は自然数})
\end{array}
$$

[*1] 5 つ目は，さらに $x=1$ は $\alpha>-1$ なら可，$x=-1$ は $\alpha>0$ なら可ですが，そこまではいくらなんでも出ないでしょう.

2005 年度問 5

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2}\le 1+\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1+\sum_{n=2}^{k}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=1+\left(1-\frac{1}{k}\right)\le 2$$

よって $^\forall n$ に対し $1\le\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)\le 2$[*2]

以下 $b_n=\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)(x+1)^n$ とすると

$x\le -2, 0\le x$ の場合
$|b_n|\ge 1\cdot 1^n=1$ より $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ は 0 に収束しない．ゆえに級数は発散．

$-2<x<0$ の場合
$S_n=|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|$，$r=x+1$ として，$|r|<1$ より
$S_n<2|r|+2|r|^2+\cdots 2|r|^n<2\dfrac{|r|}{1-|r|}$
よって単調増加数列 S_n は上に有界であるので収束する．
したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は絶対収束する．ゆえに級数は収束．

∴　べき級数が収束 $\Leftrightarrow -2<x<0$

2004 年度問 5

$a_n=(2^n+n)$ として
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n}{2^{n+1}+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n}{2^n}}{2+\frac{n+1}{2^n}}=\frac{1}{2}$$
$\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$ では $|x-1|<\frac{1}{2}$．ゆえに級数は収束．
$x<\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}<x$ では $|x-1|>\frac{1}{2}$．ゆえに級数は発散．

$x=\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}$ の場合
$b_n=(2^n+n)(x-1)^n$ とすると，この場合 $b_n=\pm\left(1+\dfrac{n}{2^n}\right)$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\pm 1$ と，0 に収束しない．ゆえに級数は発散．

∴　級数が収束 $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$

2003 年度問 5

$a_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ として
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=4$$
$-2<x<6$ では $|x-2|<4$．ゆえに級数は収束．
$x<-2, 6<x$ では $|x-2|>4$．ゆえに級数は発散．

∴　べき級数が収束する x の上限は 6

[*2] 前期を思い出しましょう．

2002 年度問 5

$a_n=\dfrac{n^n}{n!}$ として
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n+1^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$[*3]
$1-e<x<1+e$ では $|x-1|<e$．ゆえに級数は収束．
$x<1-e, 1+e<x$ では $|x-1|>e$．ゆえに級数は発散．

$x=1\pm e$ の場合
$b_n=\dfrac{n^n}{n!}(x-1)$ とすると，この場合 $|b_{n+1}|=\dfrac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}|b_n|$
ここで
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{1}{k!}$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n}(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!}$$[*4]
より $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ は n に対する単調増加数列．[*5*6]

よって $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\le\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ より
$|b_{n+1}|\ge|b_n|$ となり，$|b_n|\ge|b_1|=e$ となる．
よって $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ は 0 に収束しない．ゆえに級数は発散．

∴　べき級数が収束 $\Leftrightarrow 1-e<x<1+e$

2001 年度問 5

$a_n=\dfrac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}$ として
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2$$
$1<x<5$ では $|x-3|<2$．ゆえに級数は収束．
$x<1, 5<x$ では $|x-3|>2$ より級数は発散．

$x=1,5$ の場合
$b_n=\dfrac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}(x-3)^n$ とすると
この場合 $b_n=\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots 2n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}>1$
よって $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ は 0 に収束しない．ゆえに級数は発散．

∴　べき級数が収束 $\Leftrightarrow 1<x<5$

[*3] e の定義は $(1+\frac{1}{n})^n$ での $n\to\infty$ の極限です．
[*4] ここで $k!\ge 2^{k-1}$ を使うことで $(1+\frac{1}{n})^n\le 1+\displaystyle\sum_{k=1}\frac{1}{2^{k-1}}=3$ より上に有界であることが示される．それと以下に示されている単調増加性より極限値 e の存在が証明される．
[*5] 前期の授業で習いました．
[*6] 各 k に対して，n が大きくなれば $\sum$ の中身が大きくなる．さらに n が大きくなれば $\sum$ で足す項の数が増える．

1992 年度問 5

（2001 年度と同様にして）
べき級数が収束 $\Leftrightarrow$ $-1 < x < 3$

教科書演習問題 135

(1)　$a_k = (-1)^k \dfrac{x^k}{k!(n+k)!}$ として

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{x}{(k+1)(n+k+1)}$$

よって ${}^\forall x$ に対して $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0$ より級数は収束.

(2)　$g_n'(x) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g_n'(x+h) - g_n'(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x+h)^k - x^k}{k!(n+k)!}$$

分子の $(x+h)^k - x^k = khx^{k-1} + \dfrac{k(k-1)}{2}h^2x^{k-2} + \ldots$
は $h \to 0$ で khx^{k-1} のみが残り*7

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k-1}hk}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k-1}k}{k!(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)(-1)^{k-1}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!\big((k-1)+(n+1)\big)!}$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!(k+n+1)!} = -g_{n+1}(x)$$

*7 h が 2 乗以上のものは無視できるということですが…厳密さに欠けますね．おまけなので大目に見てください．