

問 3 , 問 4 : 重積分

2005 年度問 3

$D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq xy \leq 2x\}$ とするとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D x^3 y \, dx dy$$

2005 年度問 4

次の各積分の値を求めよ.

(1) $\iiint_D \frac{dx dy dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$ ただし, $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$

(2) $\iiint_D \frac{dx dy dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z}}$ ただし, $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\}$

2004 年度問 3

λ を正定数とし, $x \geq 0$ における連続関数 $f(x)$ に対し

$$F_\lambda = \int_0^x (x-y)^\lambda f(y) \, dy \quad (x \geq 0)$$

とする. このとき $\int_0^x F_\lambda(t) \, dt$ は $F_{\lambda+1}(x)$ の定数倍であることを示しその定数 (λ に依る) を求めよ.

2004 年度問 4

$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ とするとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\iiint_D z \sqrt{1-x^2-y^2+z^2} \, dx dy dz$$

2003 年度問 3

平面 $x + y + z = 1$ と 3 つの座標面とによって囲まれた領域を D とするとき,

積分 $\iiint_D y \, dx dy dz$ の値を求めよ.

2003 年度問 4

D を中心原点, 半径 1 の円とするとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

2002 年度問 3

$D = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ とするとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\iiint_D x^2 z \, dx dy dz$$

2002 年度問 4 (教科書演習問題 115 改)

$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$ とするとき, 次の積分が存在するための実数 β の条件を求め,

そのときの積分の値を求めよ.

$$\iiint_D \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\beta}$$

2001 年度問 3

$x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1$ で定まる領域を D とするとき次の積分の値を求めよ.

$$\iiint_D \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}$$

2001 年度問 4

f を区間 $[0, 1]$ 上の C^1 級関数とするとき, $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f'(x^2 + y^2) \, dx dy = \pi$

であるためには $f(1) - f(0) = 1$ が必要十分であることを証明せよ.

2000 年度問 3

次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y} dy$$

2000 年度問 4

$D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0, x + y + \sqrt{z} \leq 1\}$ とするとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\iiint_D z \, dx dy dz$$

2000 年度問 5

a, b, c を正定数とするととき次の関係式が成り立つことを示し, その値を求めよ.

$$\iiint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx dy dz = abc \iiint_{u^2 + v^2 + w^2 \leq 1} (a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2) \, dudvdw$$

1992 年度問 1

n を自然数とするととき, 領域 $x^2 + y^2 + z^{2n} < 1$ の体積を求めよ.

1992 年度問 3

積分 $\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}(2 + x^2 + y^2)}$ の値を求めよ.

演習問題：積分，重積分編

問 32(2003/10/15)(教科書演習問題 83-(3) 改)

次の定積分の値を求めよ.

(1) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

(2) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

問 33(2003/10/29)

正数 a, b が $\int_0^1 \frac{dx}{(a + bx^4)^{\frac{1}{2}}} = 1$ を満たすとき

$$\int_0^1 \frac{dx}{(a + bx^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2a} \left\{ 1 + \frac{1}{(a+b)^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

であることを示せ.

問 34(2003/10/29)(教科書演習問題 85-(2))

$\frac{d}{dx} \left(\int_0^x e^{(e^t+x)} dt \right)$ を計算せよ.

問 37(2003/11/12)

$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ の値を求めよ.

問 44(2003/11/26)(教科書演習問題 102-(5) 改)

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y, y^2 - x^2 \leq 1\}$ のとき

$\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2} dx dy$ の値を求めよ.

問 45(2003/12/10)(教科書演習問題 104)

区間 $[0, \infty)$ 上の関数 φ, ψ に対し

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_0^x \varphi(t)\psi(x-t)dt$$

により, 区間 $[0, \infty)$ 上の関数 $\varphi * \psi$ を定義する. f, g, h が区間 $[0, \infty)$ 上の連続関数なら

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

が成り立つことを証明せよ.

問 46(2003/12/10)

$0 \leq x, y, z \leq 1, y + z \leq x, y \leq x^2$ で定まる領域を D とするとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\iiint_D z \, dx dy dz$$

問 47(2003/12/10)

以下で定まる立体の体積を求めよ.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + z \leq 1, \quad x, y, z \geq 0$$

問 49(2004/01/14)

(1) $f(x)$ が \mathbf{R} 上の連続関数で $a(x), b(x)$ が \mathbf{R} 上の微分可能な関数ならば

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) \, dt \right) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $x > 0$ に対し

$$f(x) = \int_x^{x+1} \left\{ \int_x^y e^{z^2} \, dz \right\} dy$$

とすると $f''(x)$ を積分を含まない形で表せ.

問 51(2004/01/14)(教科書演習問題 108)

実数 a, b が $a^2 + b^2 = 1$ をみたすとき, 連続関数 $f(x)$ に対し

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax+by) \, dx dy = 2 \int_{-1}^1 f(u) \sqrt{1-u^2} \, du$$

が成り立つことを示せ.

($u = ax + by, v = -bx + ay$ として変数変換してみよ.)

問 52(2004/01/14)

$D = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ のとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\iiint_D x^2 z \, dx dy dz$$

問 45'(2005/12/14)

曲線 $y = x^3$ と直線 $x + y = 2$ と直線 $x = -1$ とで囲まれた領域 (境界も含む) を D とするとき,

積分 $\iint_D xy \, dx dy$ の値を求めよ.

問 52'(2006/01/11)(教科書演習問題 107-(5))

$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0\}$ とするとき次の積分の値を求めよ.

$$\iiint_D x e^{-x^2-y^2-z^2} \, dx dy dz$$

教科書演習問題 103-(1)

以下で定まる立体の体積を求めよ.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1, \quad x, y, z \geq 0$$

$s = x, t = xy$ と変数変換する.

積分範囲は $1 \leq s \leq 2, 1 \leq t \leq 2s$ に変わり,

$x = s, y = \frac{t}{s}$ より Jacobian は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{t}{s^2} & \frac{1}{s} \end{vmatrix} = \frac{1}{s}$$

$$\begin{aligned} \iint_D x^3 y \, dx dy &= \int_1^2 ds \int_1^{2s} s^2 t \left(\frac{1}{s}\right) dt \\ &= \int_1^2 ds \left[\frac{st^2}{2}\right]_1^{2s} \\ &= \int_1^2 ds \left(2s^3 - \frac{1}{2}s\right) = \left[\frac{1}{2}s^4 - \frac{1}{4}s^2\right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{27}{4}}} \end{aligned}$$

2005 年度問 4

(1) 極座標変換し,

$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$.

積分範囲は $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ に変わり

Jacobian は $r^2 \sin \theta$.

$$\begin{aligned} &\iiint_D \frac{dx dy dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}} dr \\ &= [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}} dr = 2\pi \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}} dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{1+r^2} + r \text{ と置換して} \\ r &= \frac{t^2-1}{2t}, \sqrt{1+r^2} = \frac{t^2+1}{2t}, \frac{dr}{dt} = \frac{t^2+1}{2t^2} \text{ より} \\ 2\pi \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}} dr &= 2\pi \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)^2}{4t^3} dt \\ \frac{\pi}{2} \left[\frac{t^2}{2} - 2 \log t - \frac{1}{2t^2} \right]_1^{1+\sqrt{2}} &= \underline{\underline{\pi(\sqrt{2} - \log(1+\sqrt{2}))}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) &\iiint_D \frac{dx dy dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z}} \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_0^{1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \frac{dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z}} \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \left[2\sqrt{1+x^2+y^2+z} \right]_0^{1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \\ &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy (\sqrt{2} - \sqrt{1+x^2+y^2}) \end{aligned}$$

極座標変換して $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

積分範囲は $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, Jacobian は r .

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\sqrt{2} - \sqrt{1+r^2}) r \, dr \\ &= 2 \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{2} r^2 - \frac{1}{3} (1+r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= 2 \cdot 2\pi \cdot \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) - \left(-\frac{1}{3} \right) \right\} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}(2-\sqrt{2})}} \end{aligned}$$

2004 年度問 3

$$F_\lambda(x) = \int_0^x (x-y)^\lambda f(y) dy \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x F_\lambda(t) dt &= \int_0^x dt \int_0^t (t-y)^\lambda f(t) dy \lambda \\ &= \int_0^x dy \int_y^x (t-y)^\lambda f(t) dt \quad (\text{積分順序交換}) \\ &= \int_0^x dy \left[\frac{(t-y)^{\lambda+1}}{\lambda+1} f(t) \right]_y^x \\ &= \int_0^x \frac{1}{\lambda+1} (x-y)^{\lambda+1} f(x) dy = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda+1} F_{\lambda+1}(x)}}} \end{aligned}$$

2004 年度問 4

$$\begin{aligned} &\iiint_D z \sqrt{1-x^2-y^2+z^2} \, dx dy dz \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} z \sqrt{1-x^2-y^2+z^2} dz \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \left[\frac{1}{3} (1-x^2-y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{1}{3} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \{ (2-2\sqrt{x^2+y^2})^{\frac{3}{2}} - (1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} \} \end{aligned}$$

極座標変換して $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

積分範囲は $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, Jacobian は r .

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \{ r(2-2r)^{\frac{3}{2}} - r(1-r^2)^{\frac{3}{2}} \} \\ \text{ここで } \int_0^1 r(1-r)^{\frac{3}{2}} dr &= \int_0^1 ((1-r)^{\frac{3}{2}} - (1-r)^{\frac{5}{2}}) dr \\ &= \left[-\frac{2}{5}(1-r)^{\frac{5}{2}} + \frac{7}{2}(1-r)^{\frac{7}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{2}{7} = \frac{4}{35} \\ \int_0^1 -r(1-r^2)^{\frac{3}{2}} dr &= \left[\frac{1}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = -\frac{1}{5} \\ \text{与式} &= \frac{2\pi}{3} \left(2\sqrt{2} \frac{4}{35} - \frac{1}{5} \right) = \underline{\underline{\frac{2(8\sqrt{2}-7)\pi}{105}}} \end{aligned}$$

2003 年度問 3

$$\begin{aligned} &\iiint_D y \, dx dy dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} y \, dz^{*1} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y(1-x-y) dy \\ &= \int_0^1 dx \left[\frac{(1-x)}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{1-x} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{6} (1-x)^3 dx \\ &= \frac{1}{6} \left[-\frac{1}{4} (1-x)^4 \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{24}}} \end{aligned}$$

*1 以下重積分は z, y, x の順に計算しているが別にどの順番でもよい.

2003 年度問 4

極座標変換して $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

積分範囲は $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, Jacobian は r .

$$\begin{aligned} \iint \frac{dx dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1+r^2}} \\ &= 2\pi \left[(1+r^2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \underline{2\sqrt{2}\pi - 2\pi} \end{aligned}$$

2002 年度問 3

$$\iiint_D x^2 z dx dy dz = \int_0^1 dz \iint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq z} x^2 z dx dy$$

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq z} x^2 z dx dy \text{ に対し,}$$

極座標変換して $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

積分範囲は $0 \leq r \leq z, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, Jacobian は r .

$$\begin{aligned} &\iiint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq z} x^2 z dx dy \\ &= z \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (r \cos \theta)^2 r dr \\ &= z \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) d\theta \int_0^z r^3 dr \\ &= z \cdot \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{4}r^4 \right]_0^z = \frac{\pi}{4} z^5 \\ &\text{与式} = \frac{\pi}{4} \int_0^1 z^5 dz = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{6} = \underline{\frac{\pi}{24}} \end{aligned}$$

2002 年度問 4

広義積分であるので $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ として $R \rightarrow \infty$ の極限を考える . 極座標変換し,

$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$.

積分範囲は $1 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ に変わり

Jacobian は $r^2 \sin \theta$.

$$\begin{aligned} &\iiint_D \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\beta} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_1^R r^{2-2\beta} dr \\ &= [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos \theta]_0^\pi \cdot \int_1^R r^{2-2\beta} dr = 4\pi \int_1^R r^{2-2\beta} dr \end{aligned}$$

(i) $2 - 2\beta = -1$ のとき

$$\int_1^R r^{2-2\beta} dr = \int_1^R \frac{1}{r} dr = \log R$$

これは $R \rightarrow \infty$ で発散 .

(ii) $2 - 2\beta \neq -1$ のとき

$$\int_1^R r^{2-2\beta} dr = \left[\frac{1}{3-2\beta} r^{3-2\beta} \right]_1^R = \frac{1}{3-2\beta} (R^{3-2\beta} - 1)$$

これは $3 - 2\beta > 0$ で発散 . $3 - 2\beta < 0$ で収束 .

$$\text{積分の値が存在} \Leftrightarrow \beta > \frac{3}{2}, \text{その値は} \frac{4\pi}{2\beta - 3}$$

2001 年度問 3

$$\begin{aligned} &\iiint_D \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[-\frac{1}{2}(x+y+z+1)^{-2} \right]_0^{1-x-y} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}(x+y+1)^{-2} \right) dy \\ &= \int_0^1 dx \left[-\frac{1}{8}y - \frac{1}{2}(x+y+1)^{-1} \right]_0^{1-x} \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{8}(x-1) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x+1)^{-1} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{16}(x-1)^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \log(x+1) \right]_0^1 = \underline{\frac{\log 2}{2} - \frac{5}{16}} \end{aligned}$$

2001 年度問 4

極座標変換して $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

積分範囲は $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, Jacobian は r .

$$\begin{aligned} &\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f'(x^2+y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r f'(r^2) dr \\ &= [\theta]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} f(r^2) \right]_0^1 = \pi (f(1) - f(0)) \end{aligned}$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f'(x^2+y^2) dx dy = \pi \Leftrightarrow f(1) - f(0) = \pi$$

2000 年度問 3

積分順序交換して

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \left(y \cdot \frac{\sin y}{y} \right) \\ &= [-\cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{1} \end{aligned}$$

2000 年度問 4

$$\begin{aligned} &\iiint_D z dx dy dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{(1-x-y)^2} z dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\frac{1}{2}(1-x-y)^4 \right) \\ &= \int_0^1 dx \left[-\frac{1}{10}(1-x-y)^5 \right]_0^{1-x} \\ &= \int_0^1 dx \left(\frac{1}{10}(1-x)^5 \right) \end{aligned}$$

$$= \left[-\frac{1}{60}(1-x)^6 \right]_0^1 = \frac{1}{60}$$

2000 年度問 5

左辺について, $x = au, y = bv, z = cw$ と変数変換し, 積分範囲は $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ に変わり, Jacobian は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= abc \iiint_{u^2 + v^2 + w^2 \leq 1} (a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2) du dv dw \end{aligned}$$

極座標変換し,

$$u = r \sin \theta \cos \varphi, v = r \sin \theta \sin \varphi, w = r \cos \theta.$$

積分範囲は $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ に変わり

Jacobian は $r^2 \sin \theta$.

$$\begin{aligned} & \iiint_{u^2 + v^2 + w^2 \leq 1} u^2 du dv dw \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^1 r^4 dr \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos 2\varphi + 1) d\varphi \int_{-1}^1 (1-t^2) dt \int_0^1 r^4 dr \\ & \quad (t = \cos \theta \text{ と置換}) \\ &= \left[\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^1 \cdot \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^1 = \frac{4\pi}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{u^2 + v^2 + w^2 \leq 1} v^2 du dv dw \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^1 r^4 dr \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) d\varphi \int_{-1}^1 (1-t^2) dt \int_0^1 r^4 dr \\ & \quad (t = \cos \theta \text{ と置換}) \\ &= \left[\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^1 \cdot \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^1 = \frac{4\pi}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{u^2 + v^2 + w^2 \leq 1} w^2 du dv dw \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^1 r^4 dr \\ & \quad (t = \cos \theta \text{ と置換}) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 t^2 dt \int_0^1 r^4 dr = \frac{4\pi}{15} \end{aligned}$$

$$\text{値は } \frac{4\pi abd}{15} (a^2 + b^2 + c^2)$$

1992 年度問 1

$x^2 + y^2 + z^{2n} \leq 1 - \varepsilon$ として $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限を考える.

$$\begin{aligned} \text{体積は } & \iiint_{x^2 + y^2 + z^{2n} < 1 - \varepsilon} 1 dx dy dz \\ &= \int_{-2\sqrt[n]{1-\varepsilon}}^{2\sqrt[n]{1-\varepsilon}} dz \iint_{x^2 + y^2 < 1 - z^{2n} - \varepsilon} 1 dx dy \end{aligned}$$

$\iint_{x^2 + y^2 < 1 - z^{2n} - \varepsilon} 1 dx dy$ は半径 $\sqrt{1 - z^{2n} - \varepsilon}$ の円の面積.

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^{2\sqrt[n]{1-\varepsilon}} (1 - z^{2n} - \varepsilon) \pi dz \\ &= 2\pi \int_0^{2\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \left[(1 - \varepsilon)z - \frac{1}{2n+1} z^{2n+1} \right]_0^{2\sqrt[n]{1-\varepsilon}} dz \\ &= 2\pi \left(2^n \sqrt[n]{1-\varepsilon} \frac{2n + (2n+2)\varepsilon}{2n+1} \right) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} & 2\pi \frac{2^n \sqrt[n]{1-\varepsilon} (2n + (2n+2)\varepsilon)}{2n+1} = \frac{4\pi n}{2n+1} \end{aligned}$$

1992 年度問 3

広義積分であるので $x^2 + y^2 \leq R$ として $R \rightarrow \infty$ の極限を考える. 極座標変換して $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

積分範囲は $0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, Jacobian は r .

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}(2 + x^2 + y^2)} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r dr}{r(2 + r^2)} \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}R} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{1 + r'^2} dr' \quad (r' = \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ と置換}) \\ &= \sqrt{2}\pi [\tan^{-1} r']_0^{\sqrt{2}R} = \sqrt{2}\pi \tan^{-1}(\sqrt{2}R) \\ \lim_{R \rightarrow \infty} & \sqrt{2}\pi \tan^{-1}(\sqrt{2}R) = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{2} \end{aligned}$$

問 32(2003/10/15)(教科書演習問題 83-(3) 改)

(1) $t = \cos \theta$ と置換して

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \int_1^{-1} \frac{-dt}{1 + t^2} = [\tan^{-1} t]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(2) $t = \pi - x$ と置換して

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \int_\pi^0 \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} (-1) dt \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt \\ & \quad \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

問 33(2003/10/29)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{dx}{(a + bx^4)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{(a + bx^4) - bx^4}{(a + bx^4)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{dx}{(a + bx^4)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{bx^4}{(a + bx^4)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \int_0^1 \left(-\frac{1}{2(a + bx^4)^{\frac{1}{2}}} \right)' x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \left[\frac{x}{2(a+bx^4)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{dx}{2(a+bx^4)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \frac{1}{2(a+b)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a} \left(1 + \frac{1}{(a+b)^{\frac{1}{2}}} \right)
\end{aligned}$$

問 34(2003/10/29)(教科書演習問題 85-(2))

(解法 1) $s = e^{t+x}$ で置換し, $\frac{ds}{dt} = e^{t+x} = s$ より

$$\begin{aligned}
\int_0^x e^{e^{t+x}} dt &= \int_{e^x}^{e^{2x}} \frac{e^s}{s} ds \\
\frac{d}{dx} \left(\int_{e^x}^{e^{2x}} \frac{e^s}{s} ds \right) &= \frac{e^{e^{2x}}}{e^{2x}} (2e^{2x}) - \frac{e^{e^x}}{e^x} (e^x) \\
&= \underline{2e^{e^{2x}} - e^{e^x}}
\end{aligned}$$

(解法 2) $f(u, v) = \int_0^u e^{e^{t+v}} dt$ と 2 変数関数と考え, $u = x, v = x$ とした上で x で微分する.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx} \left(\int_0^u e^{e^{t+v}} dt \right) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} \right) \int_0^u e^{e^{t+v}} dt \\
&= 1 \cdot e^{e^{u+x}} + 1 \cdot \int_0^u e^{e^{t+v}} e^{t+v} dt \\
&= e^{e^{u+x}} + \left[e^{e^{t+v}} \right]_0^u \\
&= e^{e^{u+x}} + e^{e^{u+v}} - e^{e^v} = \underline{2e^{e^{2x}} - e^{e^x}}
\end{aligned}$$

問 37(2003/11/12)

(解法 1) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} \cos\theta d\theta \quad (x = \sin\theta \text{ と置換}) \\
&= [\theta - \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{1 + \frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

(解法 2) $t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ と置換.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} \text{ より} \\
&\int_1^\infty \frac{4t^2}{(t^2 + 1)^2} dt \\
&= \int_1^\infty 2t \left(-\frac{1}{t^2 + 1} \right)' dt \\
&= - \left[\frac{2t}{t^2 + 1} \right]_1^\infty + 2 \int_1^\infty \frac{dt}{t^2 + 1} \\
&= 1 + 2 \left[\tan^{-1} t \right]_1^\infty = \underline{1 + \frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

問 44(2003/11/26)(教科書演習問題 102-(5) 改)

$$\begin{aligned}
&\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2} dx dy \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{1+x^2+y^2} dy \\
&= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \frac{1}{1+t^2} (\sqrt{1+x^2}) dt \quad (y = t\sqrt{1+x^2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \right) dx \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 \cdot \left[\tan^{-1} t \right]_0^1 = \underline{\frac{\pi}{4}(\sqrt{2}-1)}
\end{aligned}$$

問 45(2003/12/10)(教科書演習問題 104)

定義より $x \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned}
&((f * g) * h)(x) \\
&= \int_0^x (f * g)(t) h(x-t) dt \\
&= \int_0^x \left(\int_0^t f(s) g(t-s) ds \right) h(x-t) dt \\
&= \int_0^x \left(\int_s^x f(s) g(t-s) h(x-t) dt \right) ds \quad (\text{順序交換}) \\
&= \int_0^x f(s) \left(\int_s^x g(t-s) h(x-t) dt \right) ds \\
&= \int_0^x f(s) \left(\int_0^{x-s} g(\xi) h(x-s-\xi) d\xi \right) ds \quad (\xi = t-s) \\
&= \int_0^x f(s) (g * h)(x-s) ds \\
&= (f * (g * h))(x)
\end{aligned}$$

問 46(2003/12/10)

$$\begin{aligned}
&\iiint_D z dx dy dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \int_0^{x-y} z dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \left(\frac{1}{2}(x-y)^2 \right) \\
&= \int_0^1 dx \left[-\frac{1}{6}(x-y)^3 \right]_0^{x^2} \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 dx \left(-(x-x^2)^3 + x^3 \right) \\
&= \frac{1}{6} [x^6 - 3x^5 + 3x^4]_0^1 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{7} - \frac{3}{6} + \frac{3}{5} \right) = \underline{\frac{17}{420}}
\end{aligned}$$

問 47(2003/12/10)

体積は $\iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+z \leq 1} 1 dx dy dz$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy \int_0^{1-\sqrt{x}-\sqrt{y}} 1 dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy (1-\sqrt{x}-\sqrt{y}) \\
&= \int_0^1 dx \left[(1-\sqrt{x})y - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \right]_0^{(1-\sqrt{x})^2} \\
&= \int_0^1 dx \left(\frac{1}{3}(1-\sqrt{x})^3 \right) \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 (1-t)^3 (2t) dt \quad (\sqrt{x} = t \text{ と置換}) \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 ((1-t)^3 - (1-t)^4) dt \\
&= \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{4}(1-t)^4 + \frac{1}{5}(1-t)^5 \right]_0^1 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \underline{\frac{1}{30}}
\end{aligned}$$

問 49(2004/01/14)

$$(1) \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = \int_0^{b(x)} f(t) dt - \int_0^{a(x)} f(t) dt$$

ここで合成関数の微分公式より

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{b(x)} f(t) dt \right) = f(b(x))b'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{a(x)} f(t) dt \right) = f(a(x))a'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \right) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

$$(2) f(x) = \int_x^{x+1} \left\{ \int_x^y e^{z^2} dz \right\} dy$$

$$= \int_x^{x+1} dz \int_z^{x+1} e^{z^2} dy \quad (\text{順序交換})$$

$$= \int_x^{x+1} dz \left((x+1-z)e^{z^2} \right)$$

$$= (x+1) \int_x^{x+1} e^{z^2} dz - \int_x^{x+1} ze^{z^2} dz$$

$$f'(x) = \int_x^{x+1} e^{z^2} dz + (x+1) \left(e^{(x+1)^2} - e^{x^2} \right)$$

$$- \left((x+1)e^{(x+1)^2} - xe^{x^2} \right) = \int_x^{x+1} e^{z^2} dz - e^{x^2}$$

$$f''(x) = (x+1)e^{(x+1)^2} - xe^{x^2} - 2xe^{x^2} \\ = e^{(x+1)^2} - (2x+1)e^{x^2}$$

問 51(2004/01/14)(教科書演習問題 108)

$u = ax + by, v = -bx + ay$ と変数変換する.

$$a^2 + b^2 = 1 \text{ より } x = au - bv, y = bu + av, x^2 + y^2 = u^2 + v^2$$

$$\text{Jacobian は } \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 1$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax+by) dx dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f(u) du dv \\ = \int_{-1}^1 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u) dv = 2 \int_{-1}^1 f(u) \sqrt{1-u^2} du$$

問 52(2004/01/14)

$$\iiint_D x^2 z dx dy dz \\ = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 x^2 z dz \\ = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \left[\frac{1}{2} x^2 z^2 \right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \\ = \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 (1 - (x^2 + y^2)) dx dy$$

極座標変換して $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

積分範囲は $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, Jacobian は r .

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 (1-r^2)r^3 dr \\ = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) d\theta \int_0^1 (r^3 - r^5) dr$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{4} r^4 - \frac{1}{6} r^6 \right]_0^1 = \frac{\pi}{24}$$

問 45'(2005/12/14)

積分範囲は $D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq 2-x\}$

より,

$$\iint_D xy dx dy \\ = \int_{-1}^1 dx \int_{x^3}^{2-x} xy dy \\ = \int_{-1}^1 dx \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{x^3}^{2-x} \\ = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x(2-x)^2 - x^7) dx \\ = \int_0^1 -4x^2 dx = -\frac{4}{3}$$

問 52'(2006/01/11)(教科書演習問題 107-(5))

$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0\}$ とするとき次の

積分の値を求めよ.

$$\iiint_D xe^{-x^2-y^2-z^2} dx dy dz \\ = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} dx dy \int_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} xe^{-x^2-y^2-z^2} dz \\ = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} dx dy \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2-y^2-z^2} \right]_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} \\ = -\frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (e^{-4} - e^{-(x^2+y^2)}) dx dy$$

極座標変換して $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

積分範囲は $0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, Jacobian は r .

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (e^{-4} - e^{-r^2}) r dr \\ = -\pi \int_0^2 (re^{-4} - re^{-r^2}) dr \\ = -\pi \left[\frac{1}{2} r^2 e^{-4} + \frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^2 = \frac{\pi}{2} (1 - 5e^{-4})$$

教科書演習問題 103-(1)

$$\iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq 1} 1 dx dy dz \\ = \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy \int_0^{(1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} dz \\ = \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy (1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \\ = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} y^2 - \frac{4}{3} (1-\sqrt{x}) y^{\frac{3}{2}} + (1-\sqrt{x}) y \right]_0^{(1-\sqrt{x})^2} \\ = \int_0^1 dx \left(\frac{1}{6} (1-\sqrt{x})^4 \right) \\ = \frac{1}{6} \int_0^1 2t(1-t)^4 dt \quad (\sqrt{x} = t \text{ と置換}) \\ = \frac{1}{6} \left[-\frac{1}{5} (1-t)^5 + \frac{1}{6} (1-t)^6 \right]_0^1 = \frac{1}{90}$$