数学 II 学期末試験　　　　　　今野 宏

2007 年 2 月 8 日、13 時 10 分-14 時 40 分、1 年理 I13-15
解答用紙 両面 1 枚、計算用紙 1 枚、問題用紙 1 枚
教科書、ノート持ち込み不可

解答用紙の追加は認めないので、注意してください。また問題はどの順序で解答してもよい。特に断りのない限り、どの問題についても答えだけでなく考え方も書いて下さい。

[1] 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 3 \\ 3 & 7 & -3 \\ 6 & 12 & -5 \end{pmatrix}$ を対角化せよ。また A を対角化する正則行列も求めよ。

[2] $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$T_A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ を A の定める線形写像、$V = \mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \mathbf{R}^4$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) T_A の像 $\mathrm{Im}T_A$ の次元を求めよ。

(2) $\mathbf{R}^4$ の標準内積に関する V の直交補空間 $V^\perp$ の基底をひとつ（１組）求めよ。

(3) $\mathrm{Im}T_A \cap V^\perp$ の基底をひとつ（１組）求めよ。

[3] $M_2(\mathbf{R})$ を実２次正方行列全体、$X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ とする。写像 $S : M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$ を $S(A) = X^{-1}AX$ により定めるとき、次の問いに答えよ。

(1) S は線形写像であることを示せ。

(2) $M_2(\mathbf{R})$ の基底 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に関する S の行列表示を求めよ。

[4] 次の問いに答えよ。

(1) １次独立の定義を書け。（単に定義のみを書いてください。）

(2) 基底の定義を書け。（単に定義のみを書いてください。）

(3) A を (l, m) 行列、B を (m, n) 行列とするとき、$r(AB) \leq r(B)$ を証明せよ。ただし $r()$ は行列の階数（rank）を表す。

[5] ２次曲線 $2x^2 + 12xy - 7y^2 + 2x - 6y - 1 = 0$ の標準形を求めよ。