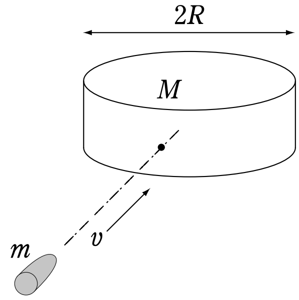
物理学 A（力学）期末試験　　教官：小宮山進　　　　　　2006 年 9 月
所要時間　90 分
注意）ノートおよび配布メモ・配布問題・回答プリント：持込可　　参考書：持ち込み不可

１．$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ を時間変化するベクトルとする。A と B の外積ベクトルの時間変化が $d(\mathbf{A}\times\mathbf{B})/dt = (d\mathbf{A}/dt)\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times(d\mathbf{B}/dt)$　となることをベクトルの成分に分解して示せ。（授業でやったとおり。）

２．平らな氷の面上に質量 M、半径 R の一様な木製の平たい円板が静止している。図のように、円板の中心に、質量 m の弾丸を水平方向に速度 v で撃ち込む（ただし弾丸は自転しない）実験を行う。ただし、円板は氷の上を摩擦無しに滑る。また、弾丸が撃ち込まれることによって生ずる円板の変形等は考えなくて良い。



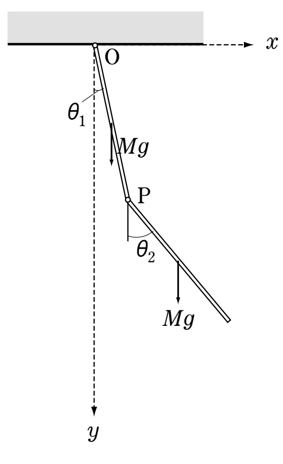
(1) 弾丸が円板をまっすぐ貫通し、速度 $v/2$ に減速して外に飛び出た。弾丸が貫通した後の円板の速度と方向を述べよ。

(2) 上記 (1) と異なり、もし弾丸が円板にめり込んで円板の中心で止まった場合、その後の円板の速度と方向を述べよ。

(3) 上記 (1) と (2) において運動エネルギーは保存するか、それぞれについて式で示し、言葉で理由を記せ。

３．図のように、長さ L、質量 M の一様な棒が天井の支点 0 からつり下げられており、さらにその棒の下端は支点 P により、もう一つの同様な棒に繋がっている。それぞれの支点に余分な質量や摩擦はなく、２つの棒は xy 面内で自由に振動できる。この 2 重振り子の運動を直接ニュートンの運動方程式によって解くのは易しくないが、ラグランジェ方程式を使うと比較的簡単に解ける。以下の手順に従って解こう。（最後の設問まで行き着けなくても気にする必要はない。どこまで行けるか、楽しみつつじっくり考えよ。）

図のように、上と下の棒の鉛直下向き方向からの傾きをそれぞれ θ_1、θ_2 とすれば、系の運動は一般化座標として θ_1 と θ_2 を取ることによって完全に記述できる。



系のラグランジェ関数を求めるために全運動エネルギー K をまず考える。全運動エネルギーは上の棒と下の棒が持つ運動エネルギーの和である。

(1) 上の棒の運動エネルギーを θ_1 を用いて書き下せ。ただし、上の棒の原点 0 のまわりの慣性モーメントが $I_0 = (1/3)MI^2$ であることを思い出せば簡単である。

(2) 下の棒の運動エネルギーを θ_1 と θ_2 を使って書き下せ。ただし、剛体の運動エネルギーは「重心の並進運動エネルギー」と「重心の周りの回転運動エネルギー」の和である

こと、また、下の棒の重心のまわりの慣性モーメントが
$I_G = (1/12)MI^2$ であることを思い出せ。（少し手間はかかるが、段階を踏んでゆっくり考えよ。ここまで出来ればまずは合格。解らなくても焦る必要はない。(3) と (4) の方が易しいのでそっちを先にやると良い。）

これで系の全運動エネルギー K が解った。次に系の位置エネルギー U を考える。U も上の棒と下の棒がそれぞれ持つ位置エネルギーの和である。

(3) 上の棒の位置エネルギーを θ_1 を用いて書き下せ。

(4) 下の棒の位置エネルギーを θ_1 と θ_2 を用いて書き下せ。

(5) 系のラグランジェ関数を書き下し、θ_1 と θ_2 に対してそれぞれラグランジェ方程式（二つ）を求めよ。（偏微分がごちゃごちゃするが、落ち着いてやること。）

(6) 上問 (5) において θ_1 と θ_2 がともに小さいとし、それぞれの式を小振幅に対する近似的式に直せ。（ここまでたどり着けば上出来。）

以下はできた人が時間をもてあまさないための仕上げの問題。

上問 (6) で求めた方程式はそれぞれが変数 θ_1 と θ_2 を含んでいるので連立微分方程式を解かなければならない。このような振動を「連成振動」と言い、授業ではやらなかったが、以下のようにすれば簡単に解ける。「θ_1 と θ_2 がともに角速度 ω で振動するのではないか」と予測して (6) で求めた方程式に、だまされたと思って $\theta_1 = Ae^{i\omega t}$ と $\theta_2 = Be^{i\omega t}$ を代入して見よ。（A, B は複素数であり、本当の物理的解はそれぞれの実部である。）得られる連立方程式を満たす ω, A, B が見つかればそれが正しい解である。

(7) まず A と B のみを変数だと考えてこの連立方程式を解いて A と B を求めてみよ。（ω が特別な値を取らない限り $A = 0$、$B = 0$ という無意味な解しか存在しないことに気づくはずである。）

(8) $A = 0$、$B = 0$ という無意味な解以外の解が存在するための ω の値を求めよ。可能な ω 値が二つ見つかるはずである。つまり、代入した形の解が存在するのである。

(9) それぞれの ω に対して A と B を求め、どのような運動かを絵を描いて説明せよ。（ともに単振動の組み合わせである。）