2006年度夏学期 数学II 学期末試験解答　　　　作成：張ヶ谷圭介

[1]

(1)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行}-\text{第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行}-\text{第1行}\times 3\text{、第3行}-\text{第1行}\times 2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行}\times -\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行}-\text{第2行}\times 2\text{、第3行}+\text{第2行}\times 5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基本変形を施して第3行が全て0になったので、この行列に逆行列は存在しない。

(2)
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行と第2行を交換}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行}-\text{第1行}\times 3\text{、第3行}+\text{第1行}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -7 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行}\times -\frac{1}{10}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{第1行}-\text{第2行}\times 4\text{、第3行}-\text{第2行}\times 7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{7}{10} & -\frac{11}{10} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第3行}\times 10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -11 & 10 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{第1行}-\text{第3行}\times \frac{1}{5}\text{、第2行}-\text{第3行}\times \frac{7}{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -11 & 10 \end{pmatrix}$$

よって、求める逆行列は、$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -5 & 8 & -7 \\ 7 & -11 & 10 \end{pmatrix}$

[2]

行列 $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -8 & 9 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 7 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ に左基本変形を繰り返すと、

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -8 & 9 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 7 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行}-\text{第2行}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 10 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 7 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行}\times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 7 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{第2行}-\text{第1行}\times 3\text{、第2行}-\text{第1行}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 17 & -16 & -6 \\ 0 & -7 & 17 & -16 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第3行}-\text{第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 17 & -16 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{第2行}\times -\frac{1}{7}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{17}{7} & \frac{16}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行}-\text{第2行}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{17}{7} & \frac{16}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって、求める解は、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{17}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{16}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{6}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ただし、α、β は任意の定数)

[3]

(1) 任意の (m,n) 行列 A に対して、ある正則行列 $P \in C(m)$、$Q \in C(n)$ を適当にとり、

$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$ とでき、r は A によってきまる。

r の値のことを A の階数という。

(2)$r(A) = r(AB)$ が成り立つ。

<u>$proof$</u>

B は正則なので、B^{-1} が存在し、B^{-1} は正則行列。

$P \in C(m)$、$Q \in C(n)$、P、Q は正則、$PAQ = \begin{pmatrix} E_{r(A)} & O_{r(A),n-r(A)} \\ 0_{m-r(A),r(A)} & O_{m-r(A),n-r(A)} \end{pmatrix}$ とする。

このとき、P、$B^{-1}Q$ は正則であり、

$P(AB)(B^{-1}Q) = PA(BB^{-1})Q = PAE_nQ = PAQ = \begin{pmatrix} E_{r(A)} & O_{r(A),n-r(A)} \\ 0_{m-r(A),r(A)} & O_{m-r(A),n-r(A)} \end{pmatrix}$

である。よって、$r(AB) = r(A)$。

Q.E.D

[4]

(1)P の法線ベクトルの一つは、$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$。$P$ は原点を通るので、求める行列は、

$$E_3 - \frac{2}{\|\boldsymbol{p}\|^2}\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{p} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & -12 \\ 3 & -12 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)Q の法線ベクトルの一つは、$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$。より、$\frac{1}{5}p \times q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は、l の方向ベクトルの一つ。また、l は点 $(3,0,1)$ を通る。よって、l 上の任意の点は変数 t を用いて、

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ -t \\ 1+2t \end{pmatrix}$ と表せる。この時、原点との距離 $L(t)$ の二乗は、

$L(t)^2 = 9t^2 + 16t + 10 = 9(t+\frac{8}{9})^2 - \frac{26}{9}$ である。よって、$L(t)$ は $t = -\frac{8}{9}$ のとき、最小。

求める座標は、$(\frac{11}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{7}{9})$

[5]

(1)A_t の第3行から第1行を、第4行から第2行の4倍を引くと、$\begin{pmatrix} t-2 & 1 & -1 & t-3 \\ -2t+1 & -2t & t-1 & 1 \\ t+1 & t+1 & 0 & 0 \\ 8t-1 & 9t & -4t+5 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det A_t = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -1 & t-3 \\ -2t+1 & -2t & t-1 & 1 \\ t+1 & t+1 & 0 & 0 \\ 8t-1 & 9t & -4t+5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -1 \\ t+1 & t+1 & 0 \\ 8t-1 & 9t & -4t+5 \end{vmatrix} - (t-3) \begin{vmatrix} -2t+1 & -2t & t-1 \\ t+1 & t+1 & 0 \\ 8t-1 & 9t & -4t+5 \end{vmatrix}$$

$$= (-4t+5)\begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ t+1 & t+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} t+1 & t+1 \\ 8t-1 & 9t \end{vmatrix} - (t-3)(-4t+5)\begin{vmatrix} -2t+1 & -2t \\ t+1 & t+1 \end{vmatrix}$$
$$-(t-3)(t-1)\begin{vmatrix} t+1 & t+1 \\ 8t-1 & 9t \end{vmatrix}$$
$$= (-4t+5)(t^2-2t-3) - (t^2+2t+1) - (t-3)(-4t+5)(t+1) - (t-3)(t-1)(t^2+2t+1)$$
$$= -(t+1)^2(t-2)^2$$

(2)

(i)$t \neq -1, 2$ の時。

$\det A_t \neq 0$ なので、A_t は正則。よって、$r(A_t) = 4$

(ii)$t = -1$ の時。

$$A_t = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第3行}-\text{第1行、第4行}+\text{第1行}} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行}+\text{第3行}}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第3行}\times -\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行}+\text{第2行}} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第1行}\times -\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって、$r(A_t) = 2$

(iii)$t = 2$ の時。

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第3行}+\text{第2行、第4行}+\text{第2行}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行}+\text{第1行}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行}\times -\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行を交換}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行}-\text{第 2 行、第 3 行}+\text{第 2 行}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 4 行}\times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行}-\text{第 4 行、第 2 行}+\text{第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行と第 4 行を交換}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって、$r(A_t) = 3$

[6]

(1)A_n の、第 n 行から第 1 行の $\frac{x_n}{x_1}$ 倍を、第 n-1 行から第 1 行の $\frac{x_{n-1}}{x_1}$ 倍を、$\cdots$ 第 2 行から第 1 行の $\frac{x_2}{x_1}$ 倍を引き、第 1 行を $\frac{1}{x_1}$ 倍することを、述べた順に実行すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ となる。よって、$r(A_n) = 1$

(2)$E_n + A_n$ の、第 n 行から第 1 行の $\frac{x_n}{x_1}$ 倍を、第 n-1 行から第 1 行の $\frac{x_{n-1}}{x_1}$ 倍を、$\cdots$ 第 2 行から第 1 行の $\frac{x_2}{x_1}$ 倍を引くことを、述べた順に実行すると、

$$\begin{pmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ -\frac{x_2}{x_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{x_{n-1}}{x_1} & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ -\frac{x_n}{x_1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ となる。

第 1 列に、第 n 列の $\frac{x_n}{x_1}$ 倍を、第 n-1 列の $\frac{x_{n-1}}{x_1}$ 倍を、$\cdots$ 第 2 行の $\frac{x_2}{x_1}$ 倍を、それぞれ足すと、

$$\begin{pmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ となる。

よって、$\det(E_n + A_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$