

[1]

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 3, \text{第 3 行} - \text{第 1 行} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} \times -\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times 2, \text{第 3 行} + \text{第 2 行} \times 5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基本変形を施して第 3 行が全て 0 になったので、この行列に逆行列は存在しない。

$$(2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行を交換}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 3, \text{第 3 行} + \text{第 1 行}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -7 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} \times -\frac{1}{10}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times 4, \text{第 3 行} - \text{第 2 行} \times 7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{7}{10} & -\frac{11}{10} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行} \times 10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -11 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times \frac{1}{5}, \text{第 2 行} - \text{第 3 行} \times \frac{7}{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -11 & 10 \end{pmatrix}$$

よって、求める逆行列は、 $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -5 & 8 & -7 \\ 7 & -11 & 10 \end{pmatrix}$

[2]

行列 $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -8 & 9 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 7 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ に左基本変形を繰り返すと、

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -8 & 9 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 7 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 2 行}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 10 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 7 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行} \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 7 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 3, \text{第 3 行} - \text{第 1 行} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 17 & -16 & -6 \\ 0 & -7 & 17 & -16 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行} - \text{第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 17 & -16 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行} \times -\frac{1}{7}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{17}{7} & \frac{16}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{17}{7} & \frac{16}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって、求める解は、
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{17}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{16}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{6}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 (ただし、 α 、 β は任意の定数)

[3]

(1) 任意の (m, n) 行列 A に対して、ある正則行列 $P \in C(m)$ 、 $Q \in C(n)$ を適当にとり、

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O_{r, n-r} \\ 0_{m-r, r} & O_{m-r, n-r} \end{pmatrix} \text{ とでき、} r \text{ は } A \text{ によってきまる。}$$

r の値のことを A の階数という。

(2) $r(A) = r(AB)$ が成り立つ。

proof

B は正則なので、 B^{-1} が存在し、 B^{-1} は正則行列。

$$P \in C(m), Q \in C(n), P, Q \text{ は正則、} PAQ = \begin{pmatrix} E_{r(A)} & O_{r(A), n-r(A)} \\ 0_{m-r(A), r(A)} & O_{m-r(A), n-r(A)} \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

このとき、 $P, B^{-1}Q$ は正則であり、

$$P(AB)(B^{-1}Q) = PA(BB^{-1})Q = PAE_nQ = PAQ = \begin{pmatrix} E_{r(A)} & O_{r(A), n-r(A)} \\ 0_{m-r(A), r(A)} & O_{m-r(A), n-r(A)} \end{pmatrix}$$

である。よって、 $r(AB) = r(A)$ 。

Q.E.D

[4]

(1) P の法線ベクトルの一つは、 $p = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ 。 P は原点を通るので、求める行列は、

$$E_3 - \frac{2}{\|p\|^2} p^t p = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & -12 \\ 3 & -12 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) Q の法線ベクトルの一つは、 $q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 。 より、 $\frac{1}{5}p \times q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は、 l の方向ベクトルの

一つ。また、 l は点 $(3, 0, 1)$ を通る。よって、 l 上の任意の点は変数 t を用いて、

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ -t \\ 1+2t \end{pmatrix} \text{ と表せる。この時、原点との距離 } L(t) \text{ の二乗は、}$$

$L(t)^2 = 9t^2 + 16t + 10 = 9(t + \frac{8}{9})^2 - \frac{26}{9}$ である。よって、 $L(t)$ は $t = -\frac{8}{9}$ のとき、最小。

求める座標は、 $(\frac{11}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{7}{9})$

[5]

(1) A_t の第3行から第1行を、第4行から第2行の4倍を引くと、
$$\begin{pmatrix} t-2 & 1 & -1 & t-3 \\ -2t+1 & -2t & t-1 & 1 \\ t+1 & t+1 & 0 & 0 \\ 8t-1 & 9t & -4t+5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A_t = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -1 & t-3 \\ -2t+1 & -2t & t-1 & 1 \\ t+1 & t+1 & 0 & 0 \\ 8t-1 & 9t & -4t+5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -1 & t-3 \\ t+1 & t+1 & 0 & 0 \\ 8t-1 & 9t & -4t+5 & 0 \end{vmatrix} - (t-3) \begin{vmatrix} -2t+1 & -2t & t-1 \\ t+1 & t+1 & 0 \\ 8t-1 & 9t & -4t+5 \end{vmatrix}$$

$$= (-4t+5) \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ t+1 & t+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} t+1 & t+1 \\ 8t-1 & 9t \end{vmatrix} - (t-3)(-4t+5) \begin{vmatrix} -2t+1 & -2t \\ t+1 & t+1 \end{vmatrix} - (t-3)(t-1) \begin{vmatrix} t+1 & t+1 \\ 8t-1 & 9t \end{vmatrix}$$

$$= (-4t+5)(t^2-2t-3) - (t^2+2t+1) - (t-3)(-4t+5)(t+1) - (t-3)(t-1)(t^2+2t+1) \\ = -(t+1)^2(t-2)^2$$

(2)

(i) $t \neq -1, 2$ の時。

$\det A_t \neq 0$ なので、 A_t は正則。よって、 $r(A_t) = 4$

(ii) $t = -1$ の時。

$$A_t = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{第3行} - \text{第1行、第4行} + \text{第1行} \\ \text{第2行} + \text{第3行} \end{array} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{第3行} \times -\frac{1}{3} \\ \text{第1行} + \text{第2行} \end{array} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{l} \text{第1行} \times -\frac{1}{3} \\ \text{第1行} + \text{第2行} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって、 $r(A_t) = 2$

(iii) $t = 2$ の時。

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{第3行} + \text{第2行、第4行} + \text{第2行} \\ \text{第2行} + \text{第1行} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} \times -\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行を交換}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 2 行, 第 3 行} + \text{第 2 行} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 4 行} \times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 4 行, 第 2 行} + \text{第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行と第 4 行を交換}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって、 $r(A_t) = 3$

[6]

(1) A_n の、第 n 行から第 1 行の $\frac{x_n}{x_1}$ 倍を、第 $n-1$ 行から第 1 行の $\frac{x_{n-1}}{x_1}$ 倍を、 \dots 第 2 行から第 1 行の $\frac{x_2}{x_1}$ 倍を引く、第 1 行を $\frac{1}{x_1}$ 倍することを、述べた順に実行すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ となる。よって、} r(A_n) = 1$$

(2) $E_n + A_n$ の、第 n 行から第 1 行の $\frac{x_n}{x_1}$ 倍を、第 $n-1$ 行から第 1 行の $\frac{x_{n-1}}{x_1}$ 倍を、 \dots 第 2 行から第 1 行の $\frac{x_2}{x_1}$ 倍を引くことを、述べた順に実行すると、

$$\begin{pmatrix} 1 + x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 & \cdots & x_1 x_n \\ -\frac{x_2}{x_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{x_{n-1}}{x_1} & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ -\frac{x_n}{x_1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

第 1 列に、第 n 列の $\frac{x_n}{x_1}$ 倍を、第 $n-1$ 列の $\frac{x_{n-1}}{x_1}$ 倍を、 \dots 第 2 列の $\frac{x_2}{x_1}$ 倍を、それぞれ足すと、

$$\begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 & \cdots & x_1 x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

よって、 $\det(E_n + A_n) = 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2$