

2006 年 9 月 5 日、15 時 00 分-16 時 30 分、1 年理一 13-15

解答用紙 両面 1 枚、計算用紙 1 枚、問題用紙 1 枚

教科書、ノート持ち込み不可

解答用紙の追加は認めないので、注意してください。また問題はどの順序で解答してもよい。特に断りのない限り、どの問題についても答えだけでなく考え方も書いて下さい。

[1] 逆行列があれば求めよ。

[2] 次の連立方程式を解け。

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 5x + 3y - 8z + 9w = -1 \\ 3x - y + 2z - w = -3 \\ 2x - 3y + 7z - 6w = -4 \end{cases}$$

[3] (1) 行列の階数 (rank) の定義を書け。(階数の意味を説明するのではなく、単に定義のみを書いてください。)

(2) A を (m, n) 行列とし、その階数を $r(A)$ で表す。 n 次正方行列 B が正則行列であるとする。このとき $r(A) = r(AB)$ が成り立つか。理由を付けて説明せよ。

[4] P を $x - 4y - 3z = 0$ により定められる R^3 内の平面、 Q を $2x + 2y - z = 5$ によって定められる R^3 内の平面とする。平面 P と平面 Q の交わりを直線 l とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $S: R^3 \rightarrow R^3$ を P に関する折り返し (面对称) とする。写像 S を行列で表せ。

(2) 直線 l 上の点で原点に最も近い点の座標を求めよ。

$$[5] 4 \text{ 次正方行列 } A_t = \begin{pmatrix} t-2 & 1 & -1 & t-3 \\ -2t+1 & -2t & t-1 & 1 \\ 2t-1 & t+2 & -1 & t-3 \\ 3 & t & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ について次の問いに答えよ。}$$

(1) $\det A_t$ を求めよ。

(2) A_t の階数を求めよ。(t の値により場合分けせよ。)

[6] n を 2 以上の整数、 x_1, \dots, x_n を正の実数とする。 n 次正方行列 $A_n = (a_{ij})$ を $a_{ij} = x_i x_j$ により定めるとき次の問いに答えよ。

(1) A_n の階数を求めよ。

(2) $\det(E_n + A_n)$ を求めよ。ただし、 E_n を n 次単位行列とする。