

記号論理学 I (木曜日 5 時間目, 金子)

1. 以下の式のそれぞれを、トートロジー、矛盾式、それ以外のものに分類しなさい。

- (a) $(\neg A \rightarrow B) \vee ((A \wedge \neg C) \leftrightarrow B)$
- (b) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)$
- (c) $(A \rightarrow (B \vee C)) \wedge (C \rightarrow \neg A)$
- (d) $((A \rightarrow B) \wedge C) \vee (A \wedge D)$
- (e) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. 次の三つの言明が同値であることを証明しなさい。(命題論理の中で)

- (a) $F \models G$
- (b) $\models F \rightarrow G$
- (c) $F \wedge \neg G$ が充足可能ではない(すなわち、この式を真とする行がありえない)

3. 次のものを自然演繹体系において証明しなさい。

- (a) $Q \rightarrow (P \rightarrow R), \neg R, Q \vdash \neg P$
- (b) $\neg P \vee Q \vdash P \rightarrow Q$
- (c) $\neg(P \rightarrow Q) \vdash Q \rightarrow P$
- (d) $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \exists x\neg Q(x), \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x)) \vdash \exists x\neg R(x)$
- (e) $\exists x\exists y(S(x, y) \vee S(y, x)) \vdash \exists x\exists y S(x, y)$

4. $\varphi = \forall x\exists y\exists z(P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge (P(x, z) \rightarrow P(z, x)))$ とするとき、この φ を充足するのは(真とするのは)、以下のモデルのどれか。

- (a) モデル \mathcal{A} のドメインは自然数の集合であり、 \mathcal{A} のもとで P の解釈(すなわち $I(P)$)は、 $I(P) = \{(m, n) \mid m < n\}$
- (b) モデル \mathcal{A}' のドメインは自然数の集合であり、 \mathcal{A}' のもとで P の解釈(すなわち $I(P)$)は、 $I(P) = \{(m, 2 \times m) \mid m \text{ は自然数}\}$
- (c) モデル \mathcal{A}'' のドメインは自然数の集合であり、 \mathcal{A}'' のもとで P の解釈(すなわち $I(P)$)は、 $I(P) = \{(m, n) \mid m < n + 1\}$

5. 以下の命題を帰納法を用いて証明しなさい。

F と G の同値性が証明できる(すなわち $\vdash F \leftrightarrow G$) とする。 H は、その部分式として F を含むような式だとする。さらに、 H' は、 H における F の現わのいくつかを G で置き換えてできる式だとする。このとき、 H と H' の同値性が証明できることを示しなさい。

6. Γ を文集合とする。このとき、「 $\Gamma \vdash A$ 」と「 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ が矛盾する」とが同値であることを証明しなさい。

注 授業プリント、自筆のノート持込可(実質なんでも可)。問 4 の \mathcal{A}' や \mathcal{A}'' の ' が後半の \mathcal{A} に掛かっていませんが原文通りです。問 6 は授業プリントに答えがあります。