

## 記号論理学 I (木曜日 5 時間目, 金子)

1. 以下の式のそれぞれを、トートロジー、矛盾式、それ以外のものに分類しなさい。

- (a)  $(\neg A \rightarrow B) \vee ((A \wedge \neg C) \leftrightarrow B)$
- (b)  $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)$
- (c)  $(A \rightarrow (B \vee C)) \wedge (C \rightarrow \neg A)$
- (d)  $((A \rightarrow B) \wedge C) \vee (A \wedge D)$
- (e)  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. 次の三つの言明が同値であることを証明しなさい。(命題論理の中で)

- (a)  $F \models G$
- (b)  $\models F \rightarrow G$
- (c)  $F \wedge \neg G$  が充足可能ではない(すなわち、この式を真とする行がありえない)

3. 次のものを自然演繹体系において証明しなさい。

- (a)  $Q \rightarrow (P \rightarrow R), \neg R, Q \vdash \neg P$
- (b)  $\neg P \vee Q \vdash P \rightarrow Q$
- (c)  $\neg(P \rightarrow Q) \vdash Q \rightarrow P$
- (d)  $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \exists x\neg Q(x), \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x)) \vdash \exists x\neg R(x)$
- (e)  $\exists x\exists y(S(x, y) \vee S(y, x)) \vdash \exists x\exists y S(x, y)$

4.  $\varphi = \forall x\exists y\exists z(P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge (P(x, z) \rightarrow P(z, x)))$  とするとき、この  $\varphi$  を充足するのは(真とするのは)、以下のモデルのどれか。

- (a) モデル  $\mathcal{A}$  のドメインは自然数の集合であり、 $\mathcal{A}$  のもとで  $P$  の解釈(すなわち  $I(P)$ )は、 $I(P) = \{(m, n) \mid m < n\}$
- (b) モデル  $\mathcal{A}'$  のドメインは自然数の集合であり、 $\mathcal{A}'$  のもとで  $P$  の解釈(すなわち  $I(P)$ )は、 $I(P) = \{(m, 2 \times m) \mid m \text{ は自然数}\}$
- (c) モデル  $\mathcal{A}''$  のドメインは自然数の集合であり、 $\mathcal{A}''$  のもとで  $P$  の解釈(すなわち  $I(P)$ )は、 $I(P) = \{(m, n) \mid m < n + 1\}$

5. 以下の命題を帰納法を用いて証明しなさい。

$F$  と  $G$  の同値性が証明できる(すなわち  $\vdash F \leftrightarrow G$ ) とする。 $H$  は、その部分式として  $F$  を含むような式だとする。さらに、 $H'$  は、 $H$  における  $F$  の現わのいくつかを  $G$  で置き換えてできる式だとする。このとき、 $H$  と  $H'$  の同値性が証明できることを示しなさい。

6.  $\Gamma$  を文集合とする。このとき、「 $\Gamma \vdash A$ 」と「 $\Gamma \cup \{\neg A\}$  が矛盾する」とが同値であることを証明しなさい。

注 授業プリント、自筆のノート持込可(実質なんでも可)。問 4 の  $\mathcal{A}'$  や  $\mathcal{A}''$  の ' が後半の  $\mathcal{A}$  に掛かっていませんが原文通りです。問 6 は授業プリントに答えがあります。