

教科書演習問題

演習問題 5 4

微分可能な関数 $u(x, y)$ が $u - x = f(u - y)$ をみたすならば (ただし $f(t)$ は微分可能な関数) $u(x, y)$ は $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$ を満たすことを示せ。

演習問題 5 7

$f = f(x, y), x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ のとき $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$ を示せ。

演習問題 5 8

$f = f(x, y), x = u + v, y = uv$ のとき、 f は x, y を変数とする C^2 級関数として (本文にはありませんでしたがこの条件がないと解けません。)

$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}$ を示せ。

(また $f(x, y)$ を u, v で編微分するなら $f(x, y) = F(u, v)$ と u, v を変数とする別の表し方をして $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$ とする必要があるように思います。)

演習問題 6 5

z を xy 平面状の領域 $\{(x, y) \mid y > 0\}$ 上の関数とすると、 z が xy の C^1 級関数である (すなわち C^1 級関数 F で $z = F(xy)$ と書ける) ためには z が x, y の C^1 級関数で $xz_x = yz_y$ を満たすことが必要十分であることを示せ。

演習問題 3 3

関数 $\frac{x}{(1-x)^2}$ を $-1 < x < 1$ としてテイラー展開せよ。

演習問題 3 5 (1)

関数 $\log(1-x^2)$ のテイラー展開を求めよ。成立する x の範囲も求めよ。

演習問題 1 2 0

ある自然数 m, l に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{m+ln} = b$ であっても $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ が成り立つとは言えないことを示せ。

演習問題 1 2 1

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = b$ であることを示せ。

演習問題 1 2 3

数列 $a_n (n = 1, 2, \dots)$ が任意の自然数 n に対して $(a_{n+1} + 1)^2 + (a_n - 1)^2 \leq 2$ をみたすならば a_n は 0 に収束することを示せ。

334 ページ : 例題

$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2$ を示せ。

問54

$u - x = f(u - y)$ を x と y でそれぞれ偏微分して

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 1 = \frac{\partial f(u - y)}{\partial(u - y)} \frac{\partial(u - y)}{\partial x} = f'(u - y) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f(u - y)}{\partial(u - y)} \frac{\partial(u - y)}{\partial y} = f'(u - y) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - 1 \right) \quad (2)$$

$f'(u - y)$ を消去するために (1) $\times \left(\frac{\partial u}{\partial y} - 1 \right) - (2) \times \frac{\partial u}{\partial x}$ によって右辺を消去し

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} - 1 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 1 \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ より } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

問57

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\text{よって } \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2$$

問58

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} + u \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial f}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \frac{\partial y}{\partial u} = v \text{ より} \right)$$

$$\left(\text{ここで } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + u \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + u \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right.$$

よ)

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (u + v) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + uv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\text{よってあとは } \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \text{ を示せばよく、これは } 1 = \frac{\partial u}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

より示される。

問65

$u = xy, v = y$ とおく, $y > 0$ より x, y について $x = \frac{u}{v}, y = v$ と解くことができるので $z(x, y) = F(u, v)$ となる関数 F が存在する。

$$z_x = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot y + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot 0 = y \frac{\partial F}{\partial u}$$

$$z_y = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot x + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot 1 = x \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$$

よって $xz_x = yz_y \Leftrightarrow y \frac{\partial F}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial v} = 0$ ($y \neq 0$ より)

これは F が v によらない $u (= xy)$ だけの 1 変数関数であることを意味するので $xz_x = yz_y \Leftrightarrow z(x, y) = F(xy)$

問 3 3

$$(1-x)^{-2} = 1 + (-2)(-x) + \frac{(-2)(-3)}{2!}(-x)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}(-x)^3 + \dots + \frac{(-1)^n(n+1)!}{n!}(-x)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

よって $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

問 3 5

$\log(1-x^2) = \log(1+x) + \log(1-x)$ であり

$-1 < x \leq 1$ のとき $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ が成立

$-1 < -x \leq 1$ のとき $\log(1-x) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \frac{(-x)^4}{4} + \dots$

$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$ が成立

よって $-1 < x < 1$ のとき $\log(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ が成立

問 1 2 0

例えば $a_n = (-1)^n$ と数列を定めれば $m = 1, l = 2$ として $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{m+ln} = 1$ だが $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は存在しない。

問 1 2 1

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ より $\forall \varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在して $n > N \Rightarrow |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

よって $n > N$ として、また任意の a_n に対して $|a_n - b| < R$ となる R が存在して (a_n は収束するので有界であるから)

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - b \right| = \left| \frac{(a_1 - b) + (a_2 - b) + \dots + (a_n - b)}{n} \right|$$

$$\leq \frac{|a_1 - b| + |a_2 - b| + \dots + |a_N - b|}{n} + \frac{|a_{N+1} - b| + \dots + |a_n - b|}{n}$$

$$< \frac{NR}{n} + \frac{(n-N)\varepsilon}{2n} < \frac{NR}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

ここで $\frac{NR}{N_0} < \frac{1}{2}\varepsilon$ となるように N_0 をとることができ

$$n > N_0 \Rightarrow \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - b \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = b$$

問 1 2 3

$$(a_{n+1} + 1)^2 + (a_n - 1)^2 \leq 2 \text{ よって } 2(a_{n+1} - a_n) \leq a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} + a_n^2 - a_n \leq 0$$

$a_{n+1} \leq a_n$ が任意の自然数 n で成立するので $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列

また $(a_n - 1)^2 \leq (a_{n+1} + 1)^2 + (a_n - 1)^2 \leq 2$ より $1 - \sqrt{2} \leq a_n \leq 1 + \sqrt{2}$ であるので $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界

よって $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在し $(\alpha + 1)^2 + (\alpha - 1)^2 \leq 2 \Rightarrow \alpha^2 \leq 0$ より $\alpha = 0$

よって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する

3 3 4 ページ : 例題

$a_0 = 0, a_1 = \sqrt{2}, \dots, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \dots$ と単調増加数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定める

(a_{n+1} は a_n のいちばん内側の $\sqrt{\quad}$ に $\sqrt{2}$ を加えた形ともとれるのでその分大きい)

このとき $a_1 < 3$ であり $a_n < 3 \Rightarrow a_{n+1} < \sqrt{2+3} < 3$ であるから、任意の自然数 n で $a_n < 3$ が成立する。よってこの単調増加数列は上に有界

よって $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在し、それは $\alpha = \sqrt{\alpha + 2}$ より $\alpha = 2$ である

また $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在することをコーシーの判定法で示すと

$$|a_n - a_{n-1}| = \left| \sqrt{2 + a_{n-1}} - \sqrt{2 + a_{n-2}} \right| = \left| \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{\sqrt{2 + a_{n-1}} + \sqrt{2 + a_{n-2}}} \right| < \frac{|a_{n-1} - a_{n-2}|}{2}$$

$$\text{よって } |a_n - a_{n-1}| < \frac{a_1 - a_0}{2^{n-1}} = \sqrt{2} 2^{1-n} < 2^{2-n}$$

従って $m < n$ として

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \dots + a_{m+1} - a_m| \leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \\ &\dots + |a_{m+1} - a_m| < 2^{2-n} + 2^{3-n} + \dots + 2^{1-m} = 2^{2-n} \frac{2^{n-m} - 1}{2 - 1} < 2^{2-n} 2^{n-m} = 2^{2-m} \end{aligned}$$

($N < m < n$ かつ $2 - N < \log_2 \varepsilon$ とすれば $2^{2-m} < 2^{2-N} < \varepsilon$ となると考え)

よって任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して $2 - \log_2 \varepsilon < N$ と自然数 N を定めれば

$$N < m < n \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

よってコーシーの判定法より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在する