

数学 I_A 前期試験 理科 1 類 5, 6, 15, 29 組 (担当 上村)

2004 年 9 月 1 日 (水) 10:50 ~ 12:20

両面解答用紙 2 枚 計算用紙 1 枚

(注) 教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問 1 次の命題は正しいか誤りかを判定し、正しいければ証明し誤りならば反例を挙げよ。

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{x \rightarrow \infty} n^2(a_n - a_{n-1}) = 1$ をみたせば、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。

(2) f が \mathbb{R}^2 上の偏微分可能な関数で、 φ と ψ が \mathbb{R} 上の微分可能な関数ならば、 $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ で定まる関数 F は \mathbb{R} 上の微分可能な関数になる。

問 2 $z = z(x, y)$ が \mathbb{R}^2 上の C^2 級関数で $xf(z) + g(z) = y$ なる関係式を満たしている (ただし、 f, g は \mathbb{R} 上の C^1 級関数とする) とき

(1) z は $z_x + f(z)z_y = 0$ を満たすことを示せ。ただし、ここで z_x, z_y は $z = z(x, y)$ の偏導関数を表す。

(2) z は $z_y^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} = 0$ を満たすことを示せ。ただし、ここで z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} は $z = z(x, y)$ の 2 階の偏導関数を表す。

問 3 $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3, 1) = -1$ なる \mathbb{R}^2 上の C^2 級の関数 $f = f(x, y)$ に対し

$$F(u, v) = f(u + v, u - v)$$

とおくとき

(1) $\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$ の $(u, v) = (2, 1)$ における値を求めよ。

(2) $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$ の $(u, v) = (2, 1)$ における値を求めよ。

問 4 $|x| < 1$ において $\frac{\log(1+x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ が成り立つように定数 $a_n (n = 1, 2, \dots)$

を定めるとき

(1) a_1, a_2, a_3 の値を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ の値を求めよ。

問 5 関数 $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$ の極値を求めよ。

問1

(1) 正しい: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(a_n - a_{n-1}) = 1$ より、 $\forall \varepsilon > 0$ に対して
 $n > N \Rightarrow 1 - \varepsilon < n^2(a_n - a_{n-1}) < 1 + \varepsilon$ となる自然数 N が存在する。
ここで $\varepsilon = 1$ として $0 < a_n - a_{n-1} < \frac{2}{n^2}$

1, コーシーの判定法

$$\begin{aligned} n > m > N \text{ として } |a_n - a_m| &= |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \dots + a_{m+1} - a_m| \\ &\leq \frac{|a_n - a_{n-1}|}{2} + \frac{|a_{n-1} - a_{n-2}|}{2} + \dots + \frac{|a_{m+1} - a_m|}{2} \\ &< \frac{2}{n^2} + \frac{2}{(n+1)^2} + \dots + \frac{2}{(m+1)^2} \\ &< \frac{2}{n(n-1)} + \frac{2}{(n-1)(n-2)} + \dots + \frac{2}{(m+1)m} \\ &= \frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n-2} - \dots - \frac{2}{m+1} + \frac{2}{m} = \frac{2}{m} - \frac{2}{n} < \frac{2}{m} \end{aligned}$$

よって $\forall \varepsilon' > 0$ に対して $N > \frac{2}{\varepsilon'}$ と自然数 N をとれば $n > m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{2}{m} < \frac{2}{N} < \varepsilon'$ となる。
よってコーシーの判定法より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。

2, 上に有界な単調増加数列は収束する

$$\begin{aligned} N < n \Rightarrow 0 < a_n - a_{n-1} < \frac{2}{n^2} \text{ より } \{a_n\}_{n=N}^{\infty} \text{ は単調増加数列} \\ \text{また } n > N \text{ のとき } a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_{N+1} - a_N) + a_N \\ &< \frac{2}{n^2} + \frac{2}{(n-1)^2} + \dots + \frac{2}{(N+1)^2} + a_N \\ &< \frac{2}{n(n-1)} + \frac{2}{(n-1)(n-2)} + \dots + \frac{2}{(m+1)m} + a_N \\ &= \frac{2}{m} - \frac{2}{n} + a_N < \frac{2}{N} + a_N \text{ よって } \{a_n\}_{n=N}^{\infty} \text{ は上に有界かつ単調増加数列} \\ &\text{よって } \{a_n\}_{n=N}^{\infty} \text{ は収束するので } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ も収束する。} \end{aligned}$$

(2) 2005年度「稲垣」様のシケプリ「講義内容編」の17ページ目にあるように、授業で反例を出されております。

誤り: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\phi\psi}{\phi^2+\psi^2} & (\phi, \psi) \neq (0, 0) \\ 0 & (\phi, \psi) = (0, 0) \end{cases}$ で $\phi(t) = t, \psi(t) = t$ とすると、これは条件をみたら

$$f(\phi(t), \psi(t)) = F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (t \neq 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

よって $F(t)$ は \mathbb{R} 上で連続ですらない。微分可能ならば連続なので、微分可能ではない。

問2 z はそのまま x, y で偏微分されます。一方 f, g の x, y での偏微分は $\frac{\partial f(z)}{\partial x} =$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z)z_x, \quad \frac{\partial f(z)}{\partial y} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = f'(z)z_y, \quad \frac{\partial g(z)}{\partial x} = \frac{\partial g(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = g'(z)z_x, \\ \frac{\partial g(z)}{\partial y} = \frac{\partial g(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = g'(z)z_y \text{ となります。また積の微分法 } \frac{\partial fg}{\partial x} = g \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial g}{\partial x} \text{ を使います。}$$

(1) $xf(z) + g(z) = y$ を x, y で偏微分して $f(z) + xf'(z)z_x + g'(z)z_x = 0$ - (1)

$$xf'(z)z_y + g'(z)z_y = 1 \text{ - (2)}$$

(1) $\times z_y$ - (2) $\times z_x$ より $f(z)z_y + z_x = 0$ が導かれる。

(2) $z_x + f(z)z_y = 0$ を x, y で偏微分して

$$z_{xx} + f'(z)z_xz_y + f(z)z_{yx} = 0 \text{ - (3)}$$

$$z_{xy} + f'(z)z_yz_y + f(z)z_{yy} = 0 \text{ - (4)}$$

$f'(z)$ を (3) $\times z_y$ - (4) $\times z_x$ で消去して

$$(z_yz_{xx} - z_xz_{xy}) + f(z)(z_yz_{yx} - z_xz_{yy}) = 0$$

両辺に z_y をかけ、 $f(z)z_y = -z_x$ で $f(z)$ を消去して

$$z_y^2z_{xx} - 2z_xz_yz_{xy} + z_x^2z_{yy} = 0$$

(この問題は教科書 152 ページ : 演習問題 56 です)

問 3

(1) $x = u + v, y = u - v$ として $F(u, v) = f(u + v, u - v) = f(x, y)$

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\text{よって } \frac{\partial F}{\partial u}(2, 1) + \frac{\partial F}{\partial v}(2, 1) = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(2 + 1, 2 - 1) = 2 \times 1 = 2$$

補足 : x, y の代わりに、例えば $s = u + v, t = u - v$ としていれば $\frac{\partial F}{\partial u}(2, 1) + \frac{\partial F}{\partial v}(2, 1) =$

$2 \frac{\partial f}{\partial s}(2 + 1, 2 - 1)$ だが、第一変数の微分という意味で $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}$ となるので問題はない。

(2)

$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} = 2 \frac{\partial f}{\partial x}$ を u, v で偏微分して

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2 \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial u} = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2 \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial v} = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \right) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right)$$

(f は x, y を変数とする C^2 級関数、 x, y は u, v を変数とする C^2 級関数なので、その合成関数 F は u, v を変数とする C^2 級関数だから $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}$ 講義内容編 18 ページ :

系 3 参照)

$$= 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ (} f \text{ は } C^2 \text{ 級関数だから)}$$

よって $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(2,1) - \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(2,1) = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2+1, 2-1) = -4$

(この問題は教科書 152 ページ : 演習問題 50 です)

問4 (1) $|x| < 1$ なので $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$

$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 + (-1)(-x) + \frac{(-1)(-2)}{2!}(-x)^2 + \dots + \frac{(-1)^n n!}{n!}(-x)^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$

よって $\frac{\log(1+x)}{1-x} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k} x^{k+i} \right) =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n \times \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$

← $(i+k=n)$ となる項でまとめた

よって $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ より $a_1 = 1, a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, a_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

(2) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

これは $-1 < x \leq 1$ で成立する。 $x = 1$ を代入し, 右辺が $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ に一致するので

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \log 2$

問5

$f_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 3, f_y(x,y) = 6xy$

よって $f_x(x,y) = 0$ かつ $f_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$ かつ $xy = 0$

これより極値を取る点の候補は $(x,y) = (0, \pm 1), (\pm 1, 0)$

$f_{xx} = 6x, f_{xy} = 6y, f_{yy} = 6x$

これより Hesse 行列 H は、 $H = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$

$(x,y) = (0, \pm 1)$ では $H = \begin{pmatrix} 0 & \pm 6 \\ \pm 6 & 0 \end{pmatrix}$

$ab - h^2 = 36 < 0$

$(0, \pm 1)$ は f の saddle point

$(x,y) = (1, 0)$ では $H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$ab - h^2 = 36 > 0$ で $a > 0$

$f(1,0) = -2$ だから、 f は $(1,0)$ で極小値 -2 をとる。

$(x,y) = (-1, 0)$ では $H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

$ab - h^2 = 36 > 0$ で $a < 0$

$f(-1,0) = 2$ だから、 f は $(-1,0)$ で極大値 2 をとる。