数学 I_A 前期試験　理科１類５，６，１５，２９組　（担当　上村）
２００４年9月1日（水）１０：５０〜１２：２０
両面解答用紙２枚　計算用紙１枚

（注）教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問１ 次の命題は正しいか誤りかを判定し, 正しければ証明し誤りならば反例を挙げよ。

（１）　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{x\to\infty} n^2\,(a_n - a_{n-1}) = 1$ をみたせば，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。

（２）　f が $\mathbf{R}^2$ 上の偏微分可能な関数で，φ と ψ が $\mathbf{R}$ 上の微分可能な関数ならば，$F(t) = f\,(\varphi(t)\,,\,\psi(t))$ で定まる関数 F は $\mathbf{R}$ 上の微分可能な関数になる。

問２　$z = z(x, y)$ が $\mathbf{R}^2$ 上の C^2 級関数で $xf(z) + g(z) = y$ なる関係式を満たしている（ただし，f, g は $\mathbf{R}$ 上の C^1 級関数とする）とき

（１）z は $z_x + f(z)z_y = 0$ を満たすことを示せ。ただし，ここで z_x, z_y は $z = z(x, y)$ の偏導関数を表す。

（２）z は $z_y^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} = 0$ を満たすことを示せ。ただし，ここで z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} は $z = z(x, y)$ の２階の偏導関数を表す。

問３　$\dfrac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = 1$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3, 1) = -1$ なる $\mathbf{R}^2$ 上の C^2 級の関数 $f = f(x, y)$ に対し

$$F(u, v) = f(u + v, u - v)$$

とおくとき

（１）$\dfrac{\partial F}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial v}$ の $(u, v) = (2, 1)$ における値を求めよ。

（２）$\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}$ の $(u, v) = (2, 1)$ における値を求めよ。

問４　$|x| < 1$ において　$\dfrac{\log(1 + x)}{1 - x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ が成り立つように定数 $a_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ を定めるとき

（１）a_1, a_2, a_3 の値を求めよ。

（２）$\lim_{n\to\infty} a_n$ の値を求めよ。

問５　関数 $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$ の極値を求めよ。

問１

（１）正しい：$\lim_{n\to\infty} n^2(a_n - a_{n-1}) = 1$ より、$\forall\varepsilon > 0$ に対して

$n > N \Rightarrow 1 - \varepsilon < n^2(a_n - a_{n-1}) < 1 + \varepsilon$ となる自然数 N が存在する。

ここで $\varepsilon = 1$ として $0 < a_n - a_{n-1} < \dfrac{2}{n^2}$

１，コーシーの判定法

$n > m > N$ として $|a_n - a_m| = |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \ldots + a_{m+1} - a_m|$

$\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \ldots + |a_{m+1} - a_m|$

$< \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{2}{(n+1)^2} + \ldots + \dfrac{2}{(m+1)^2}$

$< \dfrac{2}{n(n-1)} + \dfrac{2}{(n-1)(n-2)} + \ldots + \dfrac{2}{(m+1)m}$

$= -\dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{n-1} - \dfrac{2}{n-1} + \dfrac{2}{n-2} - \ldots - \dfrac{2}{m+1} + \dfrac{2}{m} = \dfrac{2}{m} - \dfrac{2}{n} < \dfrac{2}{m}$

よって $\forall\varepsilon' > 0$ に対して $N > \dfrac{2}{\varepsilon'}$ と自然数 N をとれば $n > m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \dfrac{2}{m} < \dfrac{2}{N} < \varepsilon'$ となる。

よってコーシーの判定法より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。

２，上に有界な単調増加数列は収束する

$N < n \Rightarrow 0 < a_n - a_{n-1} < \dfrac{2}{n^2}$ より $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ は単調増加数列

また $n > N$ のとき $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_{N+1} - a_N) + a_N$

$< \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{2}{(n-1)^2} + \ldots + \dfrac{2}{(N+1)^2} + a_N$

$< \dfrac{2}{n(n-1)} + \dfrac{2}{(n-1)(n-2)} + \ldots + \dfrac{2}{(m+1)m} + a_N$

$= \dfrac{2}{m} - \dfrac{2}{n} + a_N < \dfrac{2}{N} + a_N$ よって $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ は上に有界かつ単調増加数列

よって $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ は収束するので $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束する。

（２）２００５年度「稲垣」様のシケプリ「講義内容編」の１７ページ目にあるように、授業で反例を出されております。

誤り：$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\phi\psi}{\phi^2+\psi^2} & (\phi,\psi) \neq (0,0) \\ 0 & (\phi,\psi) = (0,0) \end{cases}$ で　$\phi(t) = t, \psi(t) = t$ とすると、これは条件をみたすが

$f(\phi(t),\psi(t)) = F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (t \neq 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$

よって $F(t)$ は $\mathbf{R}$ 上で連続ですらない。微分可能ならば連続なので、微分可能ではない。

問２ z はそのまま x, y で偏微分されます。一方 f, g の x, y での偏微分は $\dfrac{\partial f(z)}{\partial x} =$

$\dfrac{\partial f(z)}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(z)z_x$ ， $\dfrac{\partial f(z)}{\partial y} = \dfrac{\partial f(z)}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(z)z_y$ ， $\dfrac{\partial g(z)}{\partial x} = \dfrac{\partial g(z)}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = g'(z)z_x$ ， $\dfrac{\partial g(z)}{\partial y} = \dfrac{\partial g(z)}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = g'(z)z_y$ となります。また積の微分法 $\dfrac{\partial fg}{\partial x} = g\dfrac{\partial f}{\partial x} + f\dfrac{\partial g}{\partial x}$ を使います。

（１）$xf(z) + g(z) = y$ を x, y で偏微分して $f(z) + xf'(z)z_x + g'(z)z_x = 0$ − (1)
$xf'(z)z_y + g'(z)z_y = 1$ − (2)
(1)×z_y−(2)×z_x より $f(z)z_y + z_x = 0$ が導かれる。

（２）$z_x + f(z)z_y = 0$ を x, y で偏微分して
$z_{xx} + f'(z)z_xz_y + f(z)z_{yx} = 0$ − (3)
$z_{xy} + f'(z)z_yz_y + f(z)z_{yy} = 0$ − (4)
$f'(z)$ を $(3) \times z_y - (4) \times z_x$ で消去して
$(z_yz_{xx} - z_xz_{xy}) + f(z)(z_yz_{yx} - z_xz_{yy}) = 0$
両辺に z_y をかけ、$f(z)z_y = -z_x$ で $f(z)$ を消去して
$z_y^2z_{xx} - 2z_xz_yz_{xy} + z_x^2z_{yy} = 0$
（この問題は教科書１５２ページ：演習問題５６です）

問３
（１）$x = u + v, y = u - v$ として $F(u, v) = f(u + v, u - v) = f(x, y)$
$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial f}{\partial x}$$
よって $\dfrac{\partial F}{\partial u}(2, 1) + \dfrac{\partial F}{\partial v}(2, 1) = 2\dfrac{\partial f}{\partial x}(2 + 1, 2 - 1) = 2 \times 1 = 2$

補足：x, y の代わりに、例えば $s = u + v, t = u - v$ としていれば $\dfrac{\partial F}{\partial u}(2, 1) + \dfrac{\partial F}{\partial v}(2, 1) = 2\dfrac{\partial f}{\partial s}(2 + 1, 2 - 1)$ だが、第一変数の微分という意味で $\dfrac{\partial f}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ となるので問題はない。
（２）
$\dfrac{\partial F}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial v} = 2\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を u, v で偏微分して
$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial u} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial v} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\right) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)$$
（f は x, y を変数とする C^2 級関数、x, y は u, v を変数とする C^2 級関数なので、その合成関数 F は u, v を変数とする C^2 級関数だから $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}$ ←講義内容編１８ページ：系３参照）
$= 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ （f は C^2 級関数だから）

よって $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}(2,1)-\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}(2,1)=4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2+1,2-1)=-4$
(この問題は教科書１５２ページ：演習問題５０です)

問４　(１) $|x|<1$ なので $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$

$\dfrac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=1+(-1)(-x)^{+}\dfrac{(-1)(-2)}{2!}(-x)^2+\ldots+\dfrac{(-1)^n n!}{n!}(-x)^n+\ldots=\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}x^i$

よって $\dfrac{\log(1+x)}{1-x}=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}x^k\right)\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}x^i\right)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}x^{k+i}\right)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n\times\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$

$\longleftarrow$ ($i+k=n$ となる項でまとめた)

よって $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ より $a_1=1,\ a_2=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2},\ a_3=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$

(２) $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots$

これは $-1<x\leq 1$ で成立する。$x=1$ を代入し，右辺が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ に一致するので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\log 2$

問５

$f_x(x,y)=3x^2+3y^2-3,\ f_y(x,y)=6xy$

よって $f_x(x,y)=0$ かつ $f_y(x,y)=0 \ \Leftrightarrow\ x^2+y^2-1=0$ かつ $xy=0$

これより極値を取る点の候補は $(x,y)=(0,\pm1),(\pm1,0)$

$f_{xx}=6x, f_{xy}=6y, f_{yy}=6x$

これより $Hesse$ 行列 H は、$H=\begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$

$(x,y)=(0,\pm1)$ では $H=\begin{pmatrix} 0 & \pm6 \\ \pm6 & 0 \end{pmatrix}$

$ab-h^2=36<0$

$(0,\pm1)$ は f の $saddle\, point$

$(x,y)=(1,0)$ では $H=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$ab-h^2=36>0$ で $a>0$

$f(1,0)=-2$ だから、f は $(1,0)$ で極小値 -2 をとる。

$(x,y)=(-1,0)$ では $H=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

$ab-h^2=36>0$ で $a<0$

$f(-1,0)=2$ だから、f は $(-1,0)$ で極大値 2 をとる。