数学 I_A 前期試験　理科１類５，６，１５，２９組　（担当　上村）
２００３年9月3日（水）１０：５０〜１２：２０
両面解答用紙２枚　計算用紙１枚

（注）教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問１　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について次の命題は正しいか誤りかを判定し，正しければ証明し誤りならば反例を挙げよ。

（１）$a_n - a_{n-1} = \dfrac{1}{n^n}\,(n = 2, 3, \ldots)$ をみたせば，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する。

（２）$a_{n-1} + a_n + a_{n+1} = 0\,(n = 2, 3, \ldots)$ をみたせば，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する。

問２　$F(x, y, z)$ を微分可能な３変数関数で，z についての偏導関数 F_z が $F_z(x, y, z) \neq 0$ をみたすものとする。$z = f(x, y)$ が $F(x, y, f(x, y)) = 0$ をみたすとき，次が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z},\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

ただし，$z = f(x, y)$ は偏微分可能であると仮定してよい。

問３　$t > 0$ に対し，$u = \sqrt{t}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}$ とするとき，次の問に答えよ。

（１）$x \neq 0$ のとき，$\lim_{t\to+\infty} u(x, t)$ を求めよ。

（２）$\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を求めよ。

（３）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ を求めよ。

問４ $|x|$ が十分大きな実数 x に対し，$x - x^2 \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$ が成り立つように，数列 $a_n\,(n = 0, 1, \ldots)$ を定めよ。また，この式が成り立つ x の条件を記せ。

問５　関数 $f(x, y) = x^3 - xy + y^2$ の極値を求めよ。

問１

（１）正しい：$n \geq 2$ より $a_n - a_{n-1} = \dfrac{1}{n^n} \leq \dfrac{1}{n^2}$

１，コーシーの判定法

$n > m > N$ として $|a_n - a_m| = |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \ldots + a_{m+1} - a_m|$

$\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \ldots + |a_{m+1} - a_m|$

$< \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n-1)^2} + \ldots + \dfrac{1}{(m+1)^2}$

$< \dfrac{1}{n(n-1)} + \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} + \ldots + \dfrac{1}{(m+1)m}$

$= -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n-2} - \ldots - \dfrac{1}{m+1} + \dfrac{1}{m}$

$= \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}$

$< \dfrac{1}{m}$

よって $\forall \varepsilon > 0$ に対して $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ と自然数 N をとれば $n > m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{N} < \varepsilon$ となる。

よってコーシーの判定法より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し, $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する。

２，上に有界な単調増加数列は収束する

$\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ は単調増加数列

$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_2 - a_1) + a_1$

$< \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n-1)^2} + \ldots + \dfrac{1}{(2)^2} + a_1$

$< \dfrac{1}{n(n-1)} + \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} + \ldots + \dfrac{1}{2 \times 1} + a_1$

$= -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n-2} - \ldots - \dfrac{1}{2} + 1 + a_1$

$= 1 + a_1 - \dfrac{1}{n} < 1 + a_1$

よって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界かつ単調増加数列なので $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する。

（２）

誤り：反例は $a_n = \left(\begin{array}{ll} 1 & n\text{ を 3 で割ると 1 余るとき} \\ 1 & n\text{ を 3 で割ると 2 余るとき} \\ -2 & n\text{ が 3 で割り切れるとき} \end{array} \right.$

問２

$s = x, t = y$ とおいて $G(x,y) = F(x,y,f(x,y)) = F(s,t,z)$ とする

$G(x,y)$ を x で偏微分して

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=F_x\cdot 1+F_y\cdot 0+F_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}$$

$G(x,y)=0$ より $\dfrac{\partial G}{\partial x}=0$

よって $F_x+F_z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ となるので $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$ が導かれる。

同様に $G(x,y)$ を y で偏微分して $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$ が導かれる。

問３

（１）$\lim_{t\to+\infty}\sqrt{t}=\infty$，$\lim_{t\to+\infty}e^{-\frac{x^2}{4t}}=1$

よって $\lim_{t\to+\infty}u(t,x)=\infty$

（２）$\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}+\dfrac{x^2}{4t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{x}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}+\dfrac{x^2}{4t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

よって $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

（３）u は C^3 級だから $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}+\dfrac{\partial^4}{\partial x^4}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$

$\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$

$=-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}+\dfrac{x^2}{4t^2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$

$=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{x}{2t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$

$=-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}+\dfrac{x^2}{4t^2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

よって $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$

問４

$|x|$ が十分大きいと $-1<\dfrac{1}{x}\le 1$

よって $\log(1+\dfrac{1}{x})=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x}\right)^3-\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{x}\right)^n+\ldots=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{nx^n}$

$x-x^2\log(1+\dfrac{1}{x})=x-x^2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{nx^n}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{nx^{n-2}}=x-x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{nx^{n-2}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)x^n}$ （$n \longrightarrow n+2$ とおきかえた）よって $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$

式が成立する x の範囲は $-1 < \frac{1}{x} \leq 1$ より $x < -1, 1 \leq x$

問 5

$f_x(x,y) = 3x^2 - y,\ f_y(x,y) = -x + 2y$

よって $f_x(x,y) = 0$ かつ $f_y(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ 3x^2 - y = 0$ かつ $-x + 2y = 0$

これより極値を取る点の候補は $(x,y) = (0,0), (\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$

$f_{xx} = 6x, f_{xy} = -1, f_{yy} = 2$

これより $Hesse$ 行列 H は、$H = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$(x,y) = (0,0)$ では $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$ab - h^2 = -1 < 0$

$(0,0)$ は f の $saddle\,point$

$(x,y) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ では $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$ab - h^2 = 1 > 0$ で $a > 0$

$f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{432}$だから、$f$ は $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ で極小値 $-\frac{1}{432}$をとる。