数学 I_A 前期試験　理科１類５，６，１４，１５組　（担当　上村）
２００２年9月4日（水）１０：５０〜１２：２０
両面解答用紙２枚　計算用紙１枚

（注）教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問１　$f(x,y)$ は集合 $\{(x,y) \mid -1 \le x, y \le 1\}$ で定義された関数で、各 $x \in [-1,1]$ に対し $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ が存在する。このとき、次の命題は正しいか誤りかを判定し、正しければ証明し誤りならば反例を挙げよ。

（１）　$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ が存在すれば $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在し、この二つの極限値は等しい。

（２）　$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在すれば $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ が存在し、この二つの極限値は等しい。

問２　w を $2ww'' = 3(w')^2$ をみたす $\mathbf{R}$ 上の（１変数）関数とする。（ただし w',w'' は w の１階および２階の導関数を表す）とき $f(x,y) = x^2 w(xy)$ は $\mathbf{R}^2$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

をみたすことを示せ。

問３　z を xy 平面内の領域 $\{(x,y) \mid x, y > 0\}$ 上の関数とするとき z が x^2+y^2 の C^1 級関数である（すなわち、C^1 級関数 F で $z = F(x^2+y^2)$ と書ける）ためには z が x, y の C^1 級関数で $y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ をみたすことが必要十分条件である。これを示せ。

ヒント：方程式 $y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ を $u = x^2+y^2$,$v = x^2-y^2$ で変換せよ。

問４　（１）$x = 0$ を含む区間で $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(e^x-1)^n$ が成り立つように定数 $a_n(n = 1, 2, \ldots)$ を定めよ。また、この式が成り立つ x の範囲を記せ。

（２）$x \to 0$ のとき，$\frac{x}{e^x-1} = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$ となるように定数 a, b, c, d を定めよ。

問５　関数 $f(x,y) = x^3 - 6xy + 8y^3$ の極値を求めよ。

問１

（１）誤り：例は $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\text{ のとき}\\ 0 & (x,y)=(0,0)\text{ のとき}\end{cases}$ 　など

$x=0$ のとき $\lim_{y\to 0} f(x,y)=0$, $x\neq 0$ のとき $\lim_{y\to 0} f(x,y)=0$, よって $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))=0$ と極限値が存在するが $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は $x=y=t$ の場合に限っても $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{t\to 0}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ と一致しない。

（２）　正しい：$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\alpha$ とすると $\forall\varepsilon>0$ に対して $\delta>\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow |f(x,y)-\alpha|<\varepsilon$ となる δ が存在する。

よって $|x-0|<\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$ のもとでは $\delta'=\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$ として

$|y-0|<\delta'\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ より $|f(x,y)-\alpha|<\varepsilon$ すなわち $\lim_{y\to 0} f(x,y)=\alpha$

よって $\delta''=\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$ として $|x-0|<\delta''\Rightarrow|\lim_{y\to 0} f(x,y)-\alpha|=0<\varepsilon$

すなわち $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\alpha$

問２

$xy=t$ とする。

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2w)=w\frac{\partial x^2}{\partial x}+x^2\frac{\partial w}{\partial x}=2xw+x^2\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=2xw+x^2yw'$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2w)=x^2\frac{\partial w}{\partial y}=x^2\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=x^3w'$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(x^3w')=x^3\frac{\partial w'}{\partial y}=x^3\frac{\partial w'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=x^4w''$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(x^3w')=x^3\frac{\partial w'}{\partial x}+w'\frac{\partial x^3}{\partial x}=x^3\frac{\partial w'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+3x^2w'=x^3yw''+3x^2w'$$

よって $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(2xw+x^2yw')(x^4w'')-(x^3w')(x^3yw''+3x^2w')=x^5(2ww''-3w'^2)=0$

問３

$u=x^2+y^2$, $v=x^2-y^2$ とする

$z(x,y)=F(x^2+y^2)=F(u)$ と書けるとき

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2F'x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}=2F'y$

よって $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

逆に $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ が成立するとき

u,v が決まれば x,y が一意的に求まり、そこから z も求まる。よって $z(x,y)$ は u,v の関

数として $z(x,y)=F(u,v)$ と書ける

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=2x\dfrac{\partial F}{\partial u}+2x\dfrac{\partial F}{\partial v}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=2y\dfrac{\partial F}{\partial u}-2y\dfrac{\partial F}{\partial v}$

よって $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ に代入して $4xy\dfrac{\partial F}{\partial v}=0$，さらに $x\neq 0$, $y\neq 0$ より $\dfrac{\partial F}{\partial v}=0$

F は u を固定すると v が変化しても値は変化しない。よって u の関数である

すなわち $z(x,y)=F(u)=F(x^2+y^2)$ となる

問４、問５は２００５年度解答を参照のこと。