

数学 I_A 前期試験 理科 1 類 1, 2, 21, 22, 23, 24 組 (担当 上村)

1995年9月5日(火) 3:00~4:30

両面解答用紙 2 枚 計算用紙 1 枚

(注) 教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問 1 数列 $a_n (n = 1, 2, \dots)$ について次の命題は正しいか? 正しいければ証明し誤りならば反例を挙げよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) = 0$ ならば a_n は収束する。

(2) $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = 0$ ならば a_n は収束する。

問 2 $f(x, y)$ をすべての $t \in \mathbb{R}$ とすべての $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対し $f(tx, ty) = tf(x, y)$ を満たす関数とするとき、

(1) $f(x, y)$ が原点で連続であるためには $f(x, y)$ が単位円周上で有界であること, すなわち $\sup\{|f(x, y)| \mid x^2 + y^2 = 1\} < \infty$ が必要十分である。これを証明せよ。

(2) $f(x, y)$ が原点で微分可能であるならば $f(x, y) = ax + by$ (ただし、 a, b は定数) であることを証明せよ。

問 3 $u = 2x + y, v = 2x^2 + 2xy + y^2$ (ただし $y > 0$) とするとき、

(1) 偏微分方程式 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ を u, v の方程式に変換せよ。

(2) $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x+y}{y}$ が成立することを示せ。また、 $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$ を求めよ。

問 4 関数 $f(x, y) = x(x^2 + x + y^2 - 1)$ の極値を求めよ。

問1

(1) コーシーの判定法の例に出てきた、数列 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ は発散するという事実を使いましょう。

誤り： $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ で定めると $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$n > m > N$ として $n = 2m$ とすると

$$|a_n - a_m| = \left| \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m-1} + \dots + \frac{1}{m+1} \right| > \left| \frac{1}{2m} \times m \right| = \frac{1}{2}$$

よって $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ と $\forall \varepsilon$ を定めると、 $n > m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$ となる N は存在しない。よって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しない。

(2) 正しい： $\limsup a_n = 0$ なので上極限の定義より $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\varepsilon \leq a_n$ となる a_n は有限個

よって $n > N \Rightarrow 0 < a_n < \varepsilon$ となる自然数 N が存在するので、その N に対し $n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$

すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

問2

(1) $f(0,0) = tf(0,0)$ が任意の t について成立するので $f(0,0) = 0$

$f(x,y)$ が原点で連続であるならば $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\delta > \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| < \varepsilon$ となる δ が存在する

$$\text{この式全体に } \frac{2}{\delta} \text{ をかけて } 2 > \sqrt{\left(\frac{2x}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{2y}{\delta}\right)^2} \Rightarrow |f\left(\frac{2x}{\delta}, \frac{2y}{\delta}\right)| < \frac{2\varepsilon}{\delta}$$

$$x' = \frac{2x}{\delta}, y' = \frac{2y}{\delta} \text{ とおきなおすと } 2 > \sqrt{x'^2 + y'^2} \Rightarrow |f(x', y')| < \frac{2\varepsilon}{\delta}$$

よって $\sup\{|f(x,y)| \mid x^2 + y^2 = 1\} \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} < \infty$ となる

逆に $\sup\{|f(x,y)| \mid x^2 + y^2 = 1\} = M$ とすると $\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{\varepsilon}{M}$ のとき

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \sqrt{x^2 + y^2} f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right|$$

$$< \left| \frac{\varepsilon}{M} \sup\{|f(x,y)| \mid x^2 + y^2 = 1\} \right| = \left| \frac{\varepsilon}{M} M \right| = \varepsilon$$

つまり $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ と定めると $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$ より原点で連続

(2) $f(x,y)$ が原点で微分可能であるので $f(x,y)$ は $f(x,y) = f(0,0) + a(x-0) + b(y-0) + \varepsilon(x,y)$ と表すことができ、さらに $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ となる。

ここで $f(tx, ty) = atx + bty + \varepsilon(tx, ty)$, $tf(x,y) = atx + bty + t\varepsilon(x,y)$ であり、この2つが一致するので $t\varepsilon(x,y) = \varepsilon(tx, ty)$ が成立する

よってここで $x = t \cos \theta, y = t \sin \theta$ とすると $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t\varepsilon(\cos \theta, \sin \theta)}{t}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(\cos \theta, \sin \theta) = 0$
 よって $\varepsilon(\cos \theta, \sin \theta) = 0$ が任意の θ で成立し、それより任意の x, y に対し
 $\varepsilon(x, y) = \varepsilon(t \cos \theta, t \sin \theta) = t\varepsilon(\cos \theta, \sin \theta) = 0$ が成立する
 よって $f(x, y)$ は $f(x, y) = ax + by$ である。

問3

$$(1) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2 \frac{\partial z}{\partial u} + (4x + 2y) \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} + (2x + 2y) \frac{\partial z}{\partial v}$$

これを $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ に代入して

$$(2x + y) \frac{\partial z}{\partial u} + (4x^2 + 4xy + 2y^2) \frac{\partial z}{\partial v} = u \frac{\partial z}{\partial u} + 2v \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

(2) $u = (2x + y), v = \frac{1}{2}(2x + y)^2 + \frac{1}{2}y^2$ に着目し $s = 2x + y, t = y^2$ と置く。

$u = s, v = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}t$ より逆に s, v を u, v の関数として $s = u, t = 2v - u^2$ と書ける

また $s = 2x + y, t = y^2$ かつ $y > 0$ より x, y を s, t の関数として $y = \sqrt{t}, x = \frac{1}{2}(s - \sqrt{t})$ と書ける

$$\text{よって } \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \left(-\frac{1}{4\sqrt{t}}\right) \cdot (-2u) = \frac{1}{2} + \frac{2x + y}{2y} = \frac{x + y}{y}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \left(-\frac{1}{4\sqrt{t}}\right) \cdot 2 = -\frac{1}{2y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} = 0 \cdot 1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \cdot (-2u) = -\frac{2x + y}{y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} = 0 \cdot 0 + \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \cdot 2 = \frac{1}{y}$$

問4 $f_x(x, y) = 3x^2 + 2x + y^2 - 1, f_y(x, y) = 2xy$

よって $f_x(x, y) = 0$ かつ $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + y^2 - 1 = 0$ かつ $2xy = 0$

これより極値を取る点の候補は $(x, y) = (0, \pm 1), (-1, 0), \left(\frac{1}{3}, 0\right)$

$$f_{xx} = 6x + 2, f_{xy} = 2y, f_{yy} = 2x$$

これより Hesse 行列 H は、 $H = \begin{pmatrix} 6x + 2 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$

$(x, y) = (0, \pm 1)$ では $H = \begin{pmatrix} 2 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$ab - h^2 = -1 < 0$$

$(0, \pm 1)$ は f の *saddle point*

$$(x, y) = \left(\frac{1}{3}, 0\right) \text{ では } H = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$ab - h^2 = \frac{8}{3} > 0 \text{ で } a > 0$$

$f\left(\frac{1}{3}, 0\right) = -\frac{5}{27}$ だから、 f は $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ で極小値 $-\frac{5}{27}$ をとる。

$$(x, y) = (-1, 0) \text{ では } H = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$ab - h^2 = 8 > 0 \text{ で } a < 0$$

$f(-1, 0) = 1$ だから、 f は $(-1, 0)$ で極大値 1 をとる。

よって $f(x, y)$ は $(-1, 0)$ で極大値 1, $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ で極小値 $-\frac{5}{27}$ をとる