H.17

第１問

$f(x)=6x^2-2x+\int_0^2 f(x)dx$ が成立するような関数 $f(x)$ を求めよ。

$\int_0^2 f(x)\,dx = A$ (定数) とすると

$f(x) = 6x^2-2x+A$

$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (6x^2-2x+A)\,dx$

$= \left[2x^3-x^2+Ax\right]_0^2$

$= 16-4+2A$

$\therefore A = -12$

以上より $\underline{f(x) = 6x^2-2x-12}$ //

H.17

第２問

以下の微分方程式を解け。

$y'' + 4y' + 3y = e^{3x}$

同次方程式 $y'' + 4y' + 3y = 0$ の一般解は、

特性方程式が $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1, -3$

より $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$

今(右辺) $= e^{3x}$ より この微分方程式の特殊解は

$y = \alpha e^{3x}$ として、代入し

$9\alpha e^{3x} + 12\alpha e^{3x} + 3\alpha e^{3x} = e^{3x}$ より $\alpha = \frac{1}{24}$

よって、一般解は

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{24} e^{3x}$

（C_1, C_2 は任意の定数）

H.117

第 8 問

$S_n = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) dx_n$ を求めなさい。

$$S_n = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \left[(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2) x_n + \frac{1}{3} x_n^2 \right]_0^1$$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_{n-1}^2 + \frac{1}{3}) dx_{n-1}$$

$$= \cdots = \underbrace{\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3}}_{n} = \frac{n}{3}$$

H.17

第９問

$y = x^x$ の極値を求めよ。また、極小値か極大値かを答えよ。

両辺の対数をとる

$$\log y = x \log x$$

両辺 x で微分すると、

$$\frac{y'}{y} = 1 + \log x$$

$$y' = (1 + \log x) x^x$$

$$y' = 0 \iff x = \frac{1}{e}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	1	$\searrow$	$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$	$\nearrow$

$x < 0$ のときは？

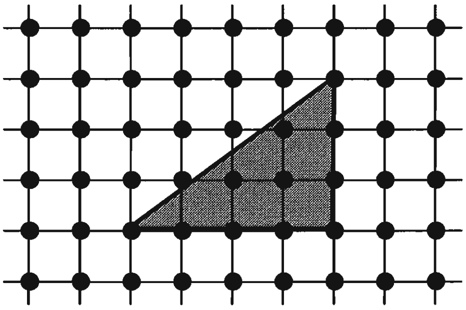
$$y\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$$

$x = \frac{1}{e}$ のとき
極小値

H17

第 10 問

下図のように等間隔で規則的に並んでいる格子上に頂点が存在する多角形を考える。このような多角形の面積 S は、多角形の周上にある格子点数 a（下図の場合は 8）と多角形の内部にある格子点数 b（下図の場合は 3）とを用いて表すことができる。この関係式を求めよ。



$S = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6$

今 $a = 8$
$b = 3$ である.

$3 + \frac{8}{2} - 1 = 6$

☆ピックの定理

面積 $=$ (内部の点の数) $+ \dfrac{(\text{辺上の点の数})}{2} - 1$

実験で見つけるということでしょうか.

$S = b + \dfrac{a}{2} - 1$

H17

別) 平面 $3x+4y+5z=k$
を考えて、
球面 $x^2+y^2+z^2=2$ と
接するとき、
すなわち 原点との距離が
$\sqrt{2}$ になるとき
を考えてもよい。

第 12 問

$x^2+y^2+z^2=2$ のとき、以下の式の最大値を求めなさい。

$$3x+4y+5z$$

☆ラグランジュの未定乗数法

$$F(x,y,z,\lambda)=3x+4y+5z-\lambda(x^2+y^2+z^2-2)$$

を考える。

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3-2\lambda x=0 \iff x=\frac{3}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=4-2\lambda y=0 \iff y=\frac{4}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=5-2\lambda z=0 \iff z=\frac{5}{2\lambda}$$

これを $x^2+y^2+z^2=2$ に代入すると

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2\underbrace{(9+16+25)}_{\parallel\ 50}=2$$

$$8\lambda^2=50 \quad \lambda^2=\frac{25}{4} \quad \lambda=\pm\frac{5}{2}$$

幾何的に考えて $\lambda=\frac{5}{2}$ のとき最大.

以上より

$x=\frac{3}{\sqrt{5}},\ y=\frac{4}{\sqrt{5}},\ z=\frac{5}{\sqrt{5}}$ のとき、

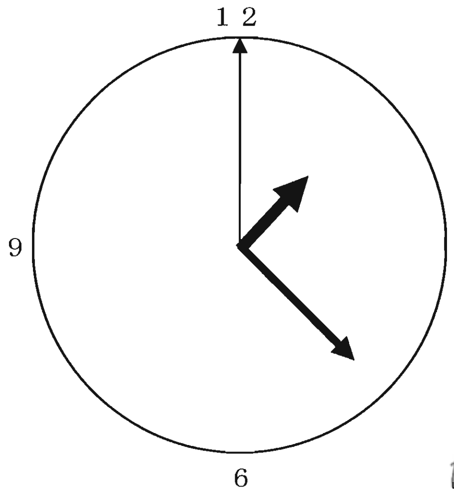
最大値 $\frac{3^2+4^2+5^2}{\sqrt{5}}=10$

$$\boxed{10}$$

H17

第18問

図のように時針、分針、秒針がなめらかに動く時計において、３つの針が完全に一致するのは一日に何回か？



長針　1分で6度（$\frac{360}{60}$）

1秒で $\frac{1}{10}$ 度（$\frac{6}{60}$）

短針　1時間で 30°（$\frac{360^\circ}{12}$）

1秒で $\frac{30}{3600} = \frac{1}{120}{}^\circ$

N時台（N=0〜11）に長針と短針が重なるのは

$$\frac{1}{10}T = \frac{T}{120} + 30N$$

$$T(N) = \frac{3600}{11}N$$

T(N)を60で割った商が分で余りが秒になる

$S(N) = \left(\frac{3600}{11}N \ \frac{1}{60} = \frac{60}{11}N\right)$ の少数部分

$S(0) = 0$

$S(1) = \frac{5}{11}$

$S(2) = \frac{10}{11}$

12:00:00
1:05:27
2:10:54
3:16:24
4:21:49
5:22:16
6:32:43
7:38:10
8:43:38 ← 分と秒が違えば×
9:49:05
10:54:32
12:00:00

$\boxed{\text{3回（全部12時）}}$

24時を含めなければ2回

H'8

第 17 問

10, 000 円札を 100 円玉，50 円玉，10 円玉の 3 種類のコインの組み合わせへ両替する方法は何通りあるか．1 種類のコインまたは 2 種類のコインしか使わない場合も含めるものとする．

(1) $50\times n$円の50円玉, 10円玉への両替は 50円を $0\sim n$枚使うので $(n+1)$通り

(2) $100\times n$円の100円玉, 50円玉, 10円玉への両替のしかたを a_n通りとすると、100円玉を少なくとも1枚使うか100円玉を全く使わないか（(1)の $50\times 2n$ になる）で

$$a_n = \underbrace{a_{n-1}}_{(n-1)+100円玉} + \underbrace{(2n+1)}_{100円玉なしで\ 50\times 2n円}$$

$a_n - a_{n-1} = 2n+1$

100	50	10
1	0	0
0	2	0
0	1	5
0	0	10

$a_1 = 4$ なので $a_0 = 1$ とすれば $n=1$ でもOK

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(2n+1) = 1 + n(n+1) + n$$
$$= (n+1)^2$$

よって、

$a_{100} = 101^2$

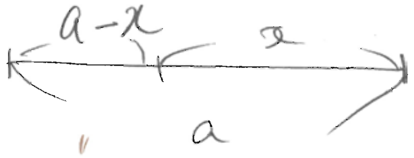
$= 10201$

$\boxed{10201通り}$

H18

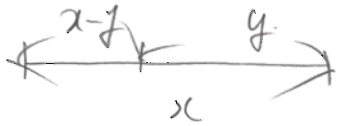
第 18 問

ある長さの 1 本の棒をランダムに選んだ場所で切る．できた 2 本の棒のうち長い方を再びランダムに選んだ場所で切る．このようにしてできた 3 本の棒切れで三角形が構成できる確率はいくらか．棒の太さは考えないものとする．



長い方をxとする

xは $\frac{a}{2} \leq x < a$ で一様分布 $f(x)=\frac{2}{a}$



長い方をyとする

xと同様に $g(y)=\frac{2}{x}$

今、 $a-x,\ y,\ x-y$ でつくる三角形の成立条件は

$$a-x+y>x-y$$
$$a>0 \quad \text{ok}$$

$$a-x+x-y>y$$
$$2y<a \quad y<\frac{a}{2}$$

$$y+x-y>a-x \qquad 2x>a \qquad x>\frac{a}{2} \quad \text{ok}$$

以上より $\frac{x}{2}<y<\frac{a}{2}$ をみたせばよい

$$P=\int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{a}{2}} g(y)\,dy\,dx=\int_{\frac{a}{2}}^{a}\left\{\frac{4}{ax}\left(\frac{a}{2}-\frac{x}{2}\right)\right\}dx$$

$$=\frac{2}{a}\int_{\frac{a}{2}}^{a}\left(\frac{a}{x}-1\right)dx$$

$$=\frac{2}{a}\Big[a\log x-x\Big]_{\frac{a}{2}}^{a}$$

$$=\frac{2}{a}\left(a\log 2-\frac{a}{2}\right)=2\log 2-1$$

$$\boxed{\begin{array}{l}2\log 2-1\\ =0.3862\cdots\end{array}}$$