受験番号 ____________________

東京大学大学院工学系研究科環境海洋工学専攻
平成 16 年度大学院修士課程

「専門科目」
入学試験問題および解答用紙

平成 15 年 9 月 1 日（月）13：00～15：30

注意事項

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2．この問題および解答用紙冊子は 23 ページです。落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所を見いだした場合には黙って挙手をし, 試験監督者に意思表示をしなさい。

3．このページの最上部の欄に受験番号のみを記入しなさい。ここ以外の箇所に受験番号，氏名を書いてはいけません。

4. 問題は全部で 20 問あります。このうち任意の 15 問を選んで解答しなさい。16 問以上を解答してはいけません。選択した問題番号を，下の選択問題番号欄に記入しなさい。

5. それぞれの問題の下に解答の道すじを書き, 四角の中に答を記入しなさい。

6．計算用紙は別に配布します。

選択問題番号

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ として. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A^n = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1}$

第１問

行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して,

(1) 固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) A^n を求めよ。

		-1	-1
		2	1
2^n	0	-2^n	-2^n
0	3^n	$2\cdot3^n$	3^n
1	1		
-2	-1		

$\det(A-\lambda E)=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-1)+2$

$= \lambda^2-5\lambda+6 = (\lambda-3)(\lambda-2)=0$

$\Leftrightarrow \lambda = 2, 3$

$\lambda=2 \Rightarrow \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\lambda=3 \Rightarrow \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\begin{array}{l} (1)\ 2,\ 3 \\ (2) \begin{pmatrix} -2^n+2\cdot3^n & -2^n+3^n \\ 2^{n+1}-2\cdot3^n & 2^{n+1}-3^n \end{pmatrix} \end{array}}$

第２問

２次方程式 $x^2+x+1=0$ の２つの解を，α，β とする。

(1) $\alpha^3+\beta^3$ を求めよ。

(2) $|\alpha^3-\beta^3|$ を求めよ。

ここで $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = 1-4 = -3$

(1) $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$ より

$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$= -1 - 3\times1\times(-1)$

$= -1+3 = 2$ （$\alpha^3=\beta^3=1$ からも）

(2) $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = (\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}$

$\boxed{\begin{array}{l} (1)\ 2 \\ (2)\ 0 \end{array}}$

第３問

代数方程式 $x^5-1=0$ のすべての解を求めよ。

$x = \cos z + i\sin z$ とおく.

$x^5 = \cos 5z + i\sin 5z = 1$

$\cos 5z = 1$

$5z = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, \dots$

$z = 0, \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\frac{10}{5}\pi}}$

$\boxed{\begin{array}{l} x = \cos\frac{2}{5}n\pi \\ (n=0,\sim,4) \end{array}}$

第４問

$z=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}$ のとき(i は虚数単位)　z^{10} を求めよ。

$z=\frac{2\sqrt{2}}{2}(1-i)=\sqrt{2}-\sqrt{2}i=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

$=2\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$　$\boxed{-1024i}$

$z^{10}=2^{10}\left(\cos\frac{35}{2}\pi+i\sin\frac{35}{2}\pi\right)=2^{10}\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

$=-2^{10}i$

第５問

$\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)+\cdots+\cos(nx)=\dfrac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ を証明せよ。

$S_n=\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)+\cdots+\cos(nx)$

$\sin\left(\frac{x}{2}\right)S_n=\cos x\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos(2x)\sin\frac{x}{2}+\cos 3x\sin\frac{x}{2}$
$+\cdots+\cos nx\sin\frac{x}{2}$

ここで、　積和の公式　$\cos x\sin y=\frac{1}{2}(\sin(x+y)-\sin(x-y))$

$\cos x\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cancel{\sin\frac{3}{2}x}-\sin\frac{x}{2}\right)$

$+$

$\cos 2x\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cancel{\sin\frac{5}{2}x}-\cancel{\sin\frac{3}{2}x}\right)$

$+$

$\vdots$

$+$

$\cos nx\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\cancel{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}\right)$

よって、$\sin\left(\frac{x}{2}\right)S_n=\frac{1}{2}\left(\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right\}-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

$$S_n=\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

//

第６問

微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-2y+2}{2x-4y-1}$ の一般解を求めよ。

$(2x-4y-1)\dfrac{dy}{dx}=x-2y+2$

$\dfrac{\partial P}{\partial x}=2=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ となるから完全微分形

$\underbrace{(2x-4y-1)}_{P}\dfrac{dy}{dx}+\underbrace{(-x+2y+2)}_{Q}=0$

このとき $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}=P$ —①

$\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}=Q$ —②

となる Φ が存在し $\Phi=C$ となる。

①より $\Phi=2xy-2y^2-y+f(x)$

②より $\Phi=-\dfrac{1}{2}x^2+2xy-2x+f(y)$

$$\boxed{-\frac{1}{2}x^2-2y^2+2xy-2x-y=C\ (C\text{は任意})}$$

第７問

定積分 $\int_0^1\dfrac{dx}{x^3+1}$ の値を計算せよ。

$\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$

$a=\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{1}{3},\ c=\dfrac{2}{3}$

$=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{3}\dfrac{x-2}{x^2-x+1}$

$\dfrac{x-2}{x^2-x+1}=\dfrac{\frac{1}{2}(2x-1)}{x^2-x+1}+\dfrac{-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}$

$\quad = \dfrac{-\frac{3}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}}$

$\int\dfrac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+C$

(中略)

10分ではムリ！

答 $\dfrac{1}{9}\sqrt{3}\pi+\dfrac{1}{3}\log 2$

第８問

$I(x)=\int_x^{x^3}\dfrac{\cos xt}{t}\,dt$ の x による微分 $I'(x)$ を求めよ。

$\int_b^a\dfrac{\cos xt}{t}dt=F(a)-F(b)$

$I(x)=F(x^3)-F(x)$

$I'(x)=F'(x^3)\cdot 3x^2-F'(x)$

$=\dfrac{\cos(x^4)}{x^3}3x^2-\dfrac{\cos(x^2)}{x}=\dfrac{3\cos(x^4)-\cos(x^2)}{x}$

$$\boxed{I'(x)=\frac{\cos(x^4)-\cos(x^2)}{x}}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

第９問

$f(x) = x^2$ のとき $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\ \frac{2}{3}\pi^3 = \frac{2}{3}\pi^2$$

以下の問いに答えよ。

(1) $-\pi \le x < \pi$ において $f(x) = x^2$ に対する Fourier 級数を求めよ。

(2) これより $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ を求めよ。

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx$$
$$f(-\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum \frac{4}{n^2}$$

$x^2 \to 2x$

$\cos nx \leftarrow \frac{1}{n}\sin nx$

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx = \left[\frac{1}{n}x^2 \sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx$$

$x \to 1$

$\sin nx \leftarrow -\frac{1}{n}\cos nx$

$$= -\frac{2}{n}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right)$$
$$= -\frac{2}{n}\left(-\frac{1}{n}\left(-\pi(-1)^n - (-\pi)(-1)^n\right)\right) = \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

$$\pi a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n \pi \qquad \underline{a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n}$$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum\frac{1}{n^2}$$
$$\underline{\sum\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

第１０問

△

$w = \frac{1}{z}$ で表される，複素平面 $z = x + iy$ から，複素平面 $w = u + iv$ への写像を考える。 z 平面上の直線 $x = a(a > 0)$ の w 平面上の写像を求めよ。

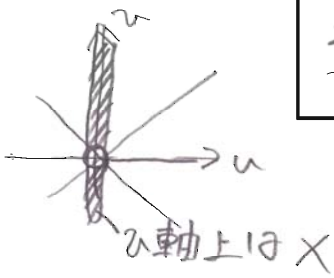
$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x^2+y^2}(x-iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

$x = a \qquad y = *$

$$\frac{a}{a^2+y^2} - \frac{y}{a^2+y^2}i$$

$$v = -\frac{y}{a}u$$

定数



$\boxed{\text{「原点を除く、v軸上の点」を除いたすべての}(u,v)}$?

第１１問

$(x + y + z)^6$ における x^2yz^3 の係数を求めよ。

$$\frac{6!}{2!\,1!\,3!} = \frac{6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3\cdot2\cdot1}}{\cancel{2}\cdot1\cdot1\cdot\cancel{3\cdot2\cdot1}} = 60$$

$\boxed{60}$

第１２問

３つの一桁の数$a,b,c(c>a>b)$がある。$c=2\times b+1$,　$a=2\times b-1$のとき以下の問いに答えよ。

(1) $a\times c$は偶数か、奇数か。

(2) $a+b+c$の最大値を求めよ。

(3) $a\times b\times c$が奇数となる(a,b,c)を求めよ。

(1) $a\times c = 4b^2-1 = 2(2b^2)-1$ (奇数)

(2) $a+b+c = 5b$

$2b+1<10$

$b<\frac{9}{2}=4.5$

より $b=4$ のとき $c=9$, $a=7$

で最大値 20

(3) $abc = b\times\underbrace{(a\times c)}_{奇数}$

奇数×奇数は偶数

だから、bは偶数 $b=2,4$

$b=2$のとき $c=5$, $a=3$

$\boxed{(3,2,5)\ (4,7,9)}$

第１３問

整数0,1,2,…,9999の中で，少なくとも一つの桁が数字2である数はいくつあるか。

$$10^4-9^4=(10^2+9^2)(10^2-9^2)$$
$$=(100+81)(10+9)(10-9)$$
$$=181\times19$$

$\boxed{3439}$

第１４問

箱の中に赤い玉が３個，白い玉が７個入っている。箱の中から，１つ玉を取り出してまた戻すという試行を10回行ったとき，赤い玉が出る回数をXとする。Xの期待値と分散を求めよ。

☆二項分布の知識があると即答できます

1回の試行で赤玉が出る確率を$p\left(=\frac{3}{10}\right)$とする。このとき、

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot {}_nC_k\cdot p^k(1-p)^{n-k}$$
$$=np\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np = 10\times\frac{3}{10}=3$$

期待値 3

分散 $\frac{21}{10}$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$=\cdots=np(1-p)=10\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{21}{10}$$

第１５問

放物線 $y = ax^2$ の直交する２接線の交点の軌跡を求めよ。

(t, at^2) での $y' = 2ax$

$y - at^2 = 2at(x - t)$

$y = 2atx - at^2$

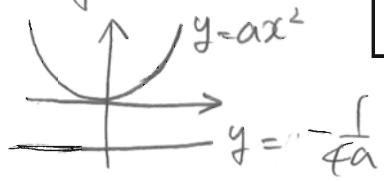
$y = 2asx - as^2$

$4a^2 st = -1$

$st = -\dfrac{1}{4a^2}$

$x = \dfrac{s+t}{2}$

$y = ast = -\dfrac{1}{4a}$



$\boxed{\text{直線 } y = -\frac{1}{4a}}$

準線

第１６問

直交座標系に３点Ａ(0,3,1)，Ｂ(2,5,2)，Ｃ(5,9,3)を通る平面がある。点Ｐ(1,2,3)と平面間の距離を求めよ。

法線ベクトルは $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (5,6,2) \times (2,2,1)$

$= (2,-1,-2)$

平面の方程式 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-3 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$

$2x - y + 3 + 2z - 2 = 0$

$2x - y + 2z + 1 = 0$

$d = \dfrac{|2-2+6|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \dfrac{6}{3} = 2$

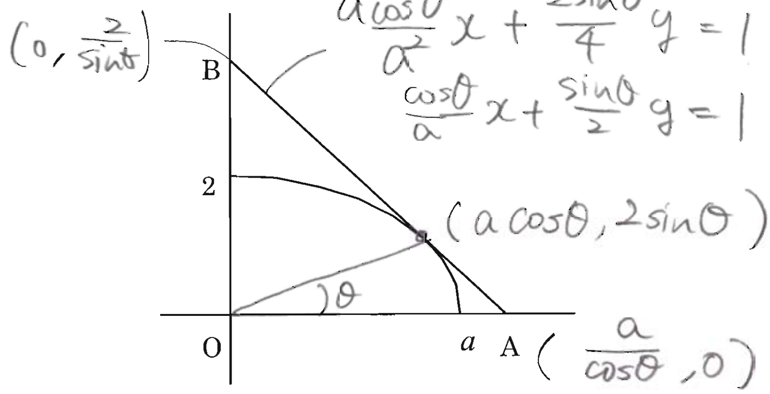
$\boxed{2.}$

第１７問

図において線分ABは楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ の接線である。但し、aは正の定数である。三角形OABの面積の最小値を求めよ・

$\dfrac{a\cos\theta}{a^2} x + \dfrac{2\sin\theta}{4} y = 1$

$\dfrac{\cos\theta}{a} x + \dfrac{\sin\theta}{2} y = 1$



$\dfrac{1}{2} \dfrac{2}{\sin\theta} \dfrac{a}{\cos\theta} = \dfrac{a}{\frac{1}{2}\sin 2\theta}$

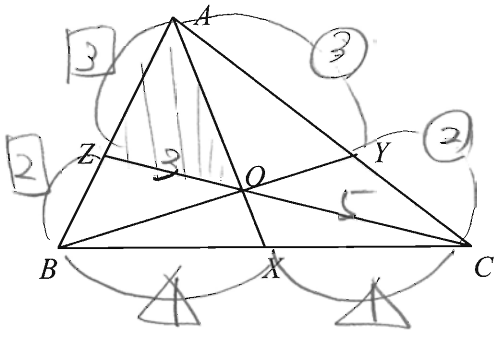
$\boxed{2a}$

今 θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ だから $0 < 2\theta < \pi$

$\sin 2\theta > 0$ で $\dfrac{1}{\sin 2\theta}$ が最小 $\Leftrightarrow$ $\sin 2\theta$ が最大 $\Rightarrow$ $2\theta = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

第１８問

ΔABCの面積をSとする。$\overline{BX}:\overline{XC}=1:1$，$\overline{CY}:\overline{YA}=2:3$のとき，$\Delta OAZ$を$S$で表せ。



チェバの定理より

$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}=1$

$AZ:ZB=3:2$

$\boxed{\frac{9}{40}S}$

またメネラウスの定理より $\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{5}{\cancel{2}}\cdot\frac{OZ}{OC}=1$

$OZ:OC=3:5$

$\Delta OAZ=S\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{8}$

第１９問

下のマス目に書かれている数字はある法則に従って並んでいる。空いているマス目の数字を求めよ。

1	3	10	50	
1	2	4	10	23
1	1	2	2	3
0	1	1	0	3
0	1	0	0	3

①	X
②	③

X＝①×②＋③

よって

X＝50×10＋23

$\boxed{523}$

第２０問

次の虫食い算のＡに入る数字を求めよ。

```
4   3          2 □ 7
   □□ ) □ A □ 1 3
          □ □
3か4      ─────────
          1 8 1
        □ □ 7
        ─────────
          □ □ 3
          □ □ 3
        ─────────
              0
```

7×○で1の位が7
→ ○＝1

3とする

4とする

$\boxed{A=1}$