受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

東京大学大学院工学系研究科環境海洋工学工学専攻
平成 15 年度大学院修士課程

「専門科目」
入学試験問題および解答用紙

平成 14 年 9 月 2 日（月）13：00〜15：30

第4問の意味がよく
わからないです

注意事項

１．試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

２．このページの最上部の欄に受験番号を記入しなさい。試験開始後、問題冊子の各ページの最上部の欄に受験番号を記入しなさい。ここ以外のところに受験番号を書いてはいけません。

３. 問題は全部で 20 問あります。このうち任意の 15 問を選んで解答しなさい。選択しなかった問題の四角の中に×印を記入しなさい。

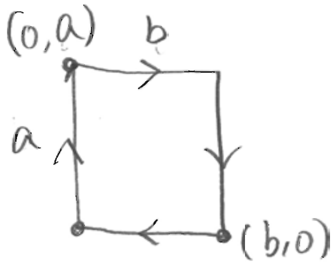
４. それぞれの問題の下に解答の道すじを書き，四角の中に答を記入しなさい。

５．計算用紙は別に配布します。

受験番号____________________

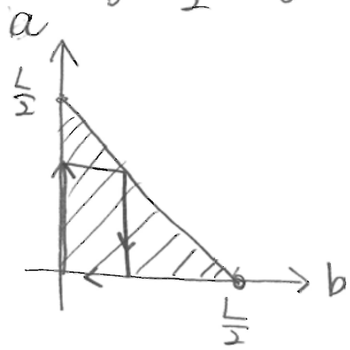
第１問

ある点から出発して北方向に直進し，90°方向を変え，続けて東方向，同じようにして次に南方向，次に西方向に直進して出発点に戻るような移動を考える。総移動距離が L である場合に，この移動で通ることのできる領域の面積を求めよ。



$2(a+b)=L$

$b=\frac{L}{2}-a$



したがって

斜線部の領域が通過できる

$\frac{1}{2}\times\frac{L}{2}\times\frac{L}{2}$

$\boxed{\frac{1}{8}L^2}$

第２問

次の連立一次方程式を解き a,b,c,d を求めよ。

$$\begin{cases} a-b+2c+d=9 \\ 2a+b-c+3d=6 \\ a+3b+2c-2d=2 \\ -3a+c+4d=-3 \end{cases}$$

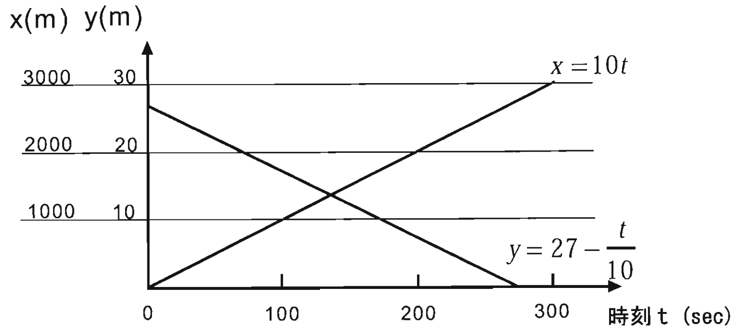
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a&=3 \\ b&=-1 \\ c&=2 \\ d&=1 \end{aligned}}$$

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿

第３問

グラフは質点の運動を示している。x は原点からの水平移動距離，y は高度である。時刻100秒のときに列車が原点を出発し，一定速度 $20m/s$ で地表を走りこの質点を追いかける。列車は高さ $5m$ で，十分に長いものとする。質点が列車の屋根に衝突するのは列車の先頭からいくらの距離のところか。



したがって先頭からの距離は

$2400-2200$
$=200(m)$

列車の高さに達するのは

$27-\frac{t}{10}=5 \Leftrightarrow t=220(s)$

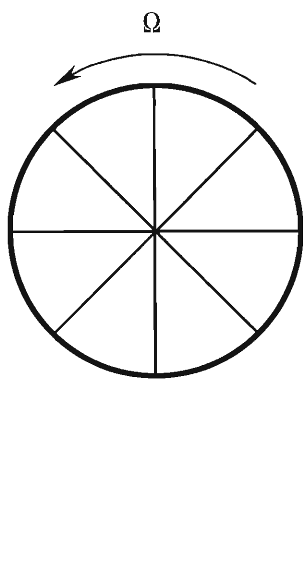
よりこのときの質点の座標は $x=10\times t$
$=2200(m)$

列車の先頭は $20\times(t-100)=20\times 120=2400(m)$

200 m

第４問

図のような模様の円盤が一定角速度 Ω で反時計回りに回転している。その様子を1秒間に30コマの速さで撮影し，撮影したフィルムを同じ速さで映写したところ，円盤は時計回りに周期４秒で回転しているように見えた。Ω の最小値を求めよ。



受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

第５問

次の差分方程式（漸化式）を解き $x(n)$ を求めよ。ここで n は正の整数，$x(0)=1$ とし，k，r は実数で定数とする。

$$x(n)=k\,x(n-1)-r$$

特性方程式 $\alpha = k\alpha - r$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{r}{k-1}$ より

$$x(n)-\frac{r}{k-1} = k\left(x(n-1)-\frac{r}{k-1}\right)$$

と変形できる。

$$x(n) = k^n\left(x(0)-\frac{r}{k-1}\right)+\frac{r}{k-1}$$

$$= k^n\,\frac{k-r-1}{k-1}+\frac{r}{k-1}$$

$$= \frac{k^n(k-1)+r(1-k^n)}{k-1}$$

$$\boxed{\dfrac{k^n(k-1)+r(1-k^n)}{k-1}}$$

第６問

$y<-x^2+6x-6 \quad = -(x-3)^2+3$

$y>x^3-7x^2+10x \quad = x(x-2)(x-5)$

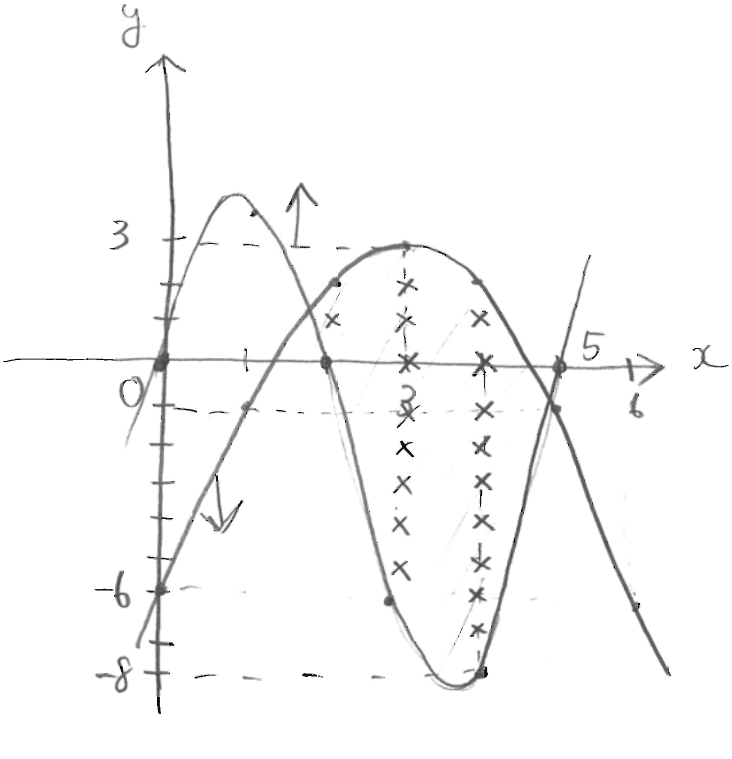
で囲まれる部分のうち (x, y) がともに整数となる点の数を求めよ。ただし，$x>0$ とする。

$y=x^3-7x^2+10x$

$y'=3x^2-14x+10$

$=(3x\quad)(x\quad)$

$\dfrac{7\pm\sqrt{49-30}}{3}=\dfrac{7\pm\sqrt{19}}{3}$



×の数 18

$\boxed{18コ}$

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

第７問

７進法で表した二桁の数字を５進法に変換したところ，一桁目と二桁目の数字が入れ替った。この数を８進法で表せ。

ab （7進法）

= ba （5進法）

となる数をみつける。

5進法だから a, b は

0～4

10進法に直すと、

$7a+b=5b+a$

$6a=4b$

$a:b=4:6=2:3$

0～4だから aは2, bは3

$7\times2+3=17$

（10進法）

$8\,\underline{)\,17}$

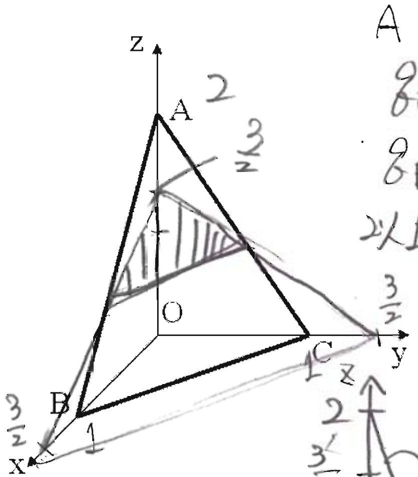
$\quad 2 \cdots 1$

8進法

$\boxed{21}$

第８問

図のように，直交する座標軸の原点をOとし，座標軸上にそれぞれ点A, B, Cをとり三角錐を作る（$OA=2, OB=1, OC=1$）。この三角錐内で，$q=a_0+a_1x+a_2y+a_3z$（a_0, a_1, a_2, a_3は定数で，x, y, zは座標の値）でqが示されるとする。各頂点でのqの値を，$q_O=0$，$q_A=4$，$q_B=2$，$q_C=2$ としたとき，$q=3$となる等値面の三角錐内での面積を求めよ。



A(0,0,2), B(1,0,0), C(0,1,0)

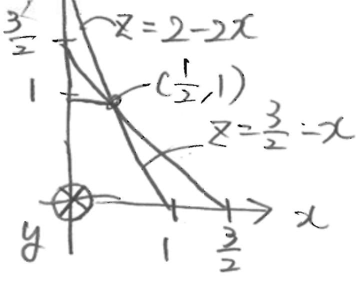
$q_O = a_0 = 0$　　$q_A = 2a_3 = 4$ ∴ $a_3 = 2$

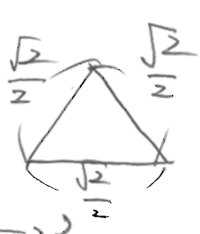
$q_B = a_1 = 2$　　$q_C = a_2 = 2$

以上より $q = 2(x+y+z)$

$q=3 \iff x+y+z=\frac{3}{2}$

−y方向からみると





$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$

$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{8}}$

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

第９問

３人がジャンケンをする。３人ともグー，チョキ，パーを同一の確率でだすものとする。

(1) 1回のジャンケンにおいて，引き分け，２人が勝つ，1人のみが勝つという３つの場合のそれぞれの確率を求めよ。

(2) 1人のみが勝つまで，ジャンケンを続けるものとしたとき，2回目で決着がつく確率を求めよ。ただし，負けたものは，次の回以降は参加できないものとする。

(1) 1人勝ち

勝つ人を選ぶ　勝ち手

$$\frac{{}_3C_1\times 3}{3^3} = \frac{1}{3}$$

2人勝ち

$$\frac{{}_3C_2\times 3}{3^3} = \frac{1}{3}$$

あいこ

$$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

(2)

$$3人 \xrightarrow{\frac{1}{3}} 3人 \xrightarrow{\frac{1}{3}} 1人$$

$$3人 \xrightarrow{\frac{1}{3}} 2人 \xrightarrow{\frac{2}{3}} 1人$$

2人で1人勝つ確率は

$$\frac{{}_2C_1\times 3}{3^2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{1+2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(1) すべて $\frac{1}{3}$

(2) $\frac{1}{3}$

第 10 問

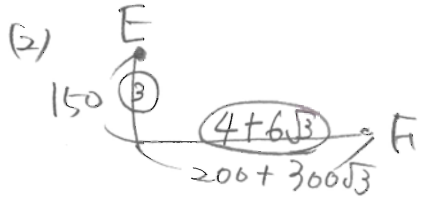
C 君と D 君の家は300m離れている。F 君の家は，A 君，B 君，C 君の家から同じ距離だけ離れている。E 君の家は，A 君，C 君の家から600m 離れていて，D 君の家から西の方角に位置している。B 君と D 君の家は500m 離れている。A 君の家から，C 君および D 君の家が北の方角に見え，B 君の家が東の方角に見える。

（１） A 君と B 君の家の距離はいくらか。

（２） E 君と F 君の家の距離はいくらか。

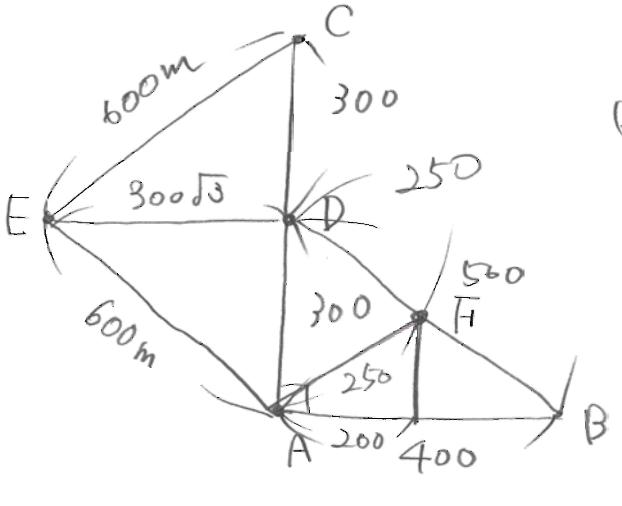
(1) 400 m ($=\sqrt{500^2-300^2}$)

(2)



$$9+16+48\sqrt{3}+108$$
$$=133+48\sqrt{3}$$

$50\sqrt{133+48\sqrt{3}}$?



受験番号____________________

第 11 問

「1」の数字が書かれた 2 枚のカードと「2」、「3」の数字が書かれたカードが1枚ずつあり，A, B, C の 3 人はこのことを知っている。各自1枚のカードを取り，自分のカードを見ずに，残りの 2 人に見せた。A は，「B のカードの数字と C のカードの数字は隣り合った数字になっている」と言った。それを聞いて，B は，「自分のカードの数字はわからない」と言った．A と C のカードの数字は何か。

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

Aより B, C は $\boxed{1}\boxed{2}$ or $\boxed{2}\boxed{3}$ のはず。

ここで Cが$\boxed{1}$か$\boxed{3}$だとすると Bは自分が$\boxed{2}$だとわかるので

Cは$\boxed{2}$

また仮にAが$\boxed{3}$だとすると残っている$\boxed{1}$だと

わかるので Aは$\boxed{1}$

A：$\boxed{1}$
C：$\boxed{2}$

第 12 問

次の虫食い算のＡに入る数字を求めよ。

$$
\begin{array}{r}
7\quad \textcircled{1} \\
\mathrm{A}\,\boxed{7} \\
\textcircled{3}\quad \boxed{3}\,3\,3\,\big)\,2\,5\,\boxed{6}\,\boxed{4}\,\square \\
\textcircled{4}\quad \boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{3}\,\boxed{1} \\
\hline
\boxed{2}\,3\,\boxed{3}\,\square \\
\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{3}\,1 \\
\hline
\textcircled{2}\qquad \square
\end{array}
$$

3 × $\boxed{1〜9}$ で 1の位が1になるのは

7のみ。(①)

②に注目すると同じ理由で ③は 3

④の 2 3 は決まるので A も 7

A = 7

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

第 13 問

暗号文「ＤＰＬＫＶＸＮＸＩ」は「福島」，暗号文「ＨＷＤＺＬ」は「岩手」と解読することができるという。このとき「神奈川」を暗号にするとどうなるか示せ。

ローマ字に対応しそう FUKUSHIMA

ただ、2, 4文字目が同じはずなのに暗号文は同じじゃない。

逆からみると I X N X V K L P D

$\uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow$

F U K U S H I M A

A B C D E F ～

すべて、アルファベットを3つずらしたもの

$\boxed{\text{DZDJDQDN}}$

つまり KANAGAWA

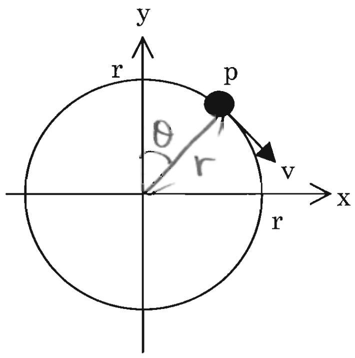
NDQDJDZD

第 14 問

半径 r の円周上を点 p が速度 v で時計回りに移動している。

(1) 時刻 0 における座標が $(x, y) = (0, r)$ であるとき， t 秒後の点 p の座標を求めよ。

(2) 時刻 0 から t の間における点 p の x 座標の期待値を求めよ。



$P(r\sin\theta, r(1-\cos\theta))$

$\dot{\theta} = \omega = \frac{v}{r} \qquad \theta = \frac{v}{r}t$

(1) $\begin{cases} x = r\sin\left(\frac{v}{r}t\right) \\ y = r\left(1-\cos\left(\frac{v}{r}t\right)\right) \end{cases}$

(2) $E(x) = \frac{1}{t}\int_0^t r\sin\left(\frac{v}{r}x\right)dx$

$= \frac{1}{t}\left[-r\frac{r}{v}\cos\left(\frac{v}{r}x\right)\right]_0^t$

$= \frac{r^2}{vt}\left(1-\cos\frac{v}{r}t\right)$

$\boxed{\frac{r^2}{vt}\left(1-\cos\frac{v}{r}t\right)}$

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

第 15 問

デカルト座標系(x, y, z)において次の(1)～(5)で表される曲面は，それぞれ下図のどれに対応するか(a)から(e)の記号で答えよ。ここで$p_1 > 0,\ \ p_2 > 0,\ \ p_3 > 0$とする。図の塗りつぶした部分は断面部を示し，曲面そのものではない。また，図に示された形状の向きは座標系のとり方により変わる。

まず、(3)は(a)

(1)は (d)

(4)は (b)

$p_1x^2 + p_2y^2 = z$ ~~(1)~~

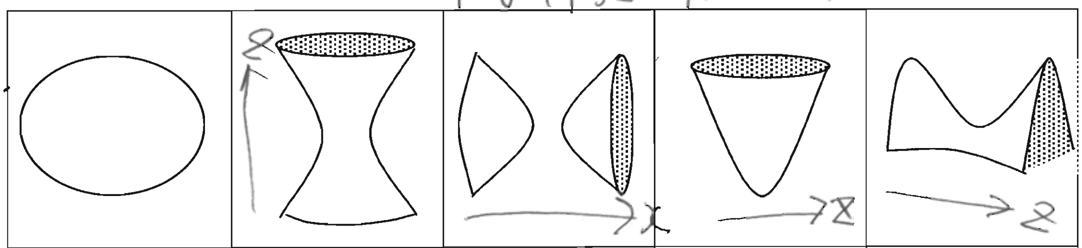
$p_1x^2 - p_2y^2 = z$ (2)　(2) e

$p_1x^2 + p_2y^2 + p_3z^2 = 1$ ~~(3)~~　二葉双曲面

$p_1x^2 + p_2y^2 - p_3z^2 = 1$ ~~(4)~~

$p_1x^2 - p_2y^2 - p_3z^2 = 1$ (5)　(5) c

$p_2y^2 + p_3z^2 - p_1x^2 = -1$



~~(a)~~	~~(b)~~	(c)	~~(d)~~	(e)

式	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
図	d	e	a	b	c

第 16 問

半径aの球に内接する直円錐のうち，体積が最大となるものの体積を求めよ。

左のようにθを設定する $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

このとき直円錐の高さは、$r(1+\cos 2\theta)$

底面の半径は $r\sin 2\theta$

$$V(\theta) = \pi(r\sin 2\theta)^2 \times r(1+\cos 2\theta) \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3} r^3 (1-\cos^2 2\theta)(1+\cos 2\theta)$$

$\boxed{\frac{32}{81}\pi a^3}$

$\cos 2\theta = t$ とおくと $(-1 < t < 1)$

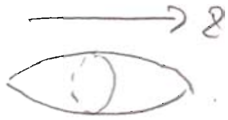
$$V(t) = \frac{\pi}{3} r^3 (1-t^2)(1+t) = \frac{\pi}{3} r^3 (1+t-t^2-t^3)$$

$$V'(t) = \frac{\pi}{3} r^3 (1-2t-3t^2) = \frac{\pi}{3} r^3 (3t-1)(t+1)$$

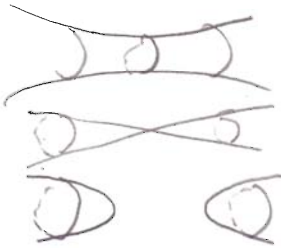
t	(-1)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
V'	0	+	0	−
V		↗	○	↘

$t = \frac{1}{3}$ のとき $V\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3} r^3 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{81}\pi r^3$

Case1)　$p, q, r, s > 0$ として.

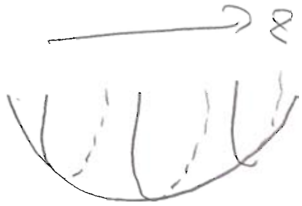


$$px^2+qy^2+rz^2 = \begin{cases} s \to \text{楕円面} \\ 0 \to \text{1点} \\ -s \to \phi \end{cases}$$



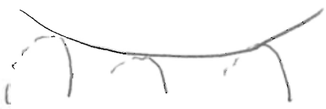
$$px^2+qy^2-rz^2 = \begin{cases} s \to \text{一葉双曲面} \\ 0 \to \text{楕円錐面} \\ -s \to \text{二葉双曲面} \end{cases}$$

Case2)　$p, q, r > 0$ として

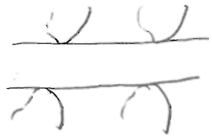


$px^2+qy^2 = \pm rz$: 楕円放物線

$$px^2+qy^2 = \begin{cases} r & : \text{楕円面} \\ 0 & : \text{一本の直線} \\ -r & \to \phi \end{cases}$$



$px^2-qy^2 = \pm rz$: 双曲放物線



$$px^2-qy^2 = \begin{cases} \pm r & : \text{双曲柱面} \\ 0 & : \text{交わる2平面} \end{cases}$$

Case3)　$p, q > 0$ として.

$px^2 = \pm qy$: 放物柱面

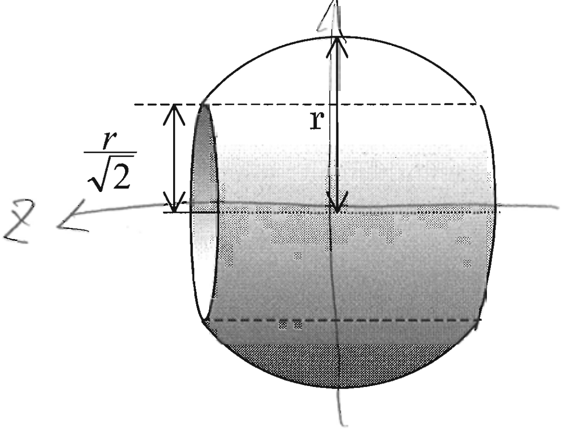
$$px^2 = \begin{cases} q & : \text{平行2平面} \\ 0 & : \text{平面} \\ -q & \to \phi \end{cases}$$

☆ 2次曲面の分類

受験番号________________

第 17 問

図のように，半径rの球から半径$\dfrac{r}{\sqrt{2}}$の円筒形をくりぬいたとき，残った部分の体積を求めよ。ただし，くりぬく円筒の中心軸は球の中心を通るものとする。



$$V = 2\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \left\{ \pi(r^2 - z^2) - \pi \frac{r^2}{2} \right\} dz$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} z - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \pi r^3$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{3} \pi r^3}$$

第 18 問

実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

で表される一次変換の固有値$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$はそれぞれ$2, -2, -4$である。これらに対する長さ1の固有ベクトルを$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$とするとき，

(1) $\vec{u}_1$を求めよ。

(2) 内積$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3$を求めよ。

(1) $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = -4$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0$$

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) 0

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

第 19 問

$\int_0^\infty \sin t \exp(-st)\, dt$ を求めよ。

↙ラプラス変換

$$A = \int_0^\infty e^{-st} \sin t\, dt$$

$e^{-st} \to -se^{-st}$

$\sin t \leftarrow -\cos t$

$$= \left[-e^{-st}\cos t\right]_0^\infty - s\int_0^\infty e^{-st}\cos t\, dt$$

$e^{-st} \to -se^{-st}$

$\cos t \leftarrow \sin t$

$$= 1 - s\left(\left[e^{-st}\sin t\right]_0^\infty + sA\right)$$

$$= 1 - s^2 A$$

$$A = \frac{1}{1+s^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+s^2}}$$

第 20 問

微分方程式

↙ 2階の非斉次は未定係数法の方がよいですね（次頁）

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = \sin t$$

を解き y を求めよ。初期条件は $t = 0$ において $y = 0, \dfrac{dy}{dt} = 0$ とする。

特性方程式 $\lambda^2 + \lambda = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = -1, 0$

同次方程式の一般解は

$y = C_1 + C_2 e^{-x}$

今 $C_1(x), C_2(x)$ として、

$C_1'(x) + C_2'(x)e^{-x} = 0$ …①

をみたすように $C_1(x), C_2(x)$ を決める

（定数変化法）

$y' = -C_2 e^{-x}$

$y'' = -C_2' e^{-x} + C_2 e^{-x}$

$y'' + y' = -C_2' e^{-x} = \sin t$

$C_2' = -e^{x}\sin t$

$C_2 = -\frac{1}{2}e^{x}(\sin x - \cos x) + A$

①より $C_1' = \sin x$

$C_1 = -\cos x + B$

よって $y = B + Ae^{-x} - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$

$y(0) = 0$ より $B + A - \frac{1}{2} = 0$

$y'(0) = -Ae^{-x} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x \Big|_{x=0}$

$= -A - \frac{1}{2} = 0$

$$\boxed{y = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t}$$

$B = 1$

$A = -\frac{1}{2}$

☆ 未定係数法　※特殊解を予測して解く

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = r(x)$$ の特殊解.

また、特性根を λ_1, λ_2 とする.

① $r(x) = r_0 e^{cx}$ のとき.

i) $c \neq \lambda_1 \wedge c \neq \lambda_2$　　$y = \alpha e^{cx}$

ii) $c = \lambda_1 \neq \lambda_2$ or $c = \lambda_2 \neq \lambda_1$　　$y = \alpha x e^{cx}$

iii) $c = \lambda_1 = \lambda_2$　　$y = \alpha x^2 e^{cx}$

② $r(x) = r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \cdots + r_0$ のとき.

i) $\lambda_1 \neq 0 \wedge \lambda_2 \neq 0$　　$y = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_0$

ii) λ_1, λ_2 いずれかが0　　$y = x(\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_0)$

iii) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$　　$y = x^2(\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_0)$

③ $r(x) = e^{cx}(r_1 \cos \omega x + r_2 \sin \omega x)$

i) $\lambda_1 \neq c \pm i\omega \wedge \lambda_2 \neq c \pm i\omega$　　$y = e^{cx}(\alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x)$

ii) $\lambda_1 = c + i\omega, \lambda_2 = c - i\omega$　　$y = x e^{cx}(\alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x)$

→ それぞれ、α_i を決めればよい.

例1) 第20問、特殊解を $y = \alpha_1 \sin t + \alpha_2 \cos t$ と予想する

$y' = \alpha_1 \cos t - \alpha_2 \sin t$　　$y'' = -\alpha_1 \sin t - \alpha_2 \cos t$

を与式に代入.

$(1 + \alpha_1 + \alpha_2)\sin t + (\alpha_2 - \alpha_1)\sin t = 0$

$1 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \wedge \alpha_2 - \alpha_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t$ ← 特殊解!