受験番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

東京大学大学院工学系研究科システム量子工学専攻
平成 18 年度大学院修士課程

「専門科目」

入学試験問題および解答用紙

平成 17 年 8 月 29 日（月）13:00～15:30

注意事項

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません．

2．落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所を見出した場合には挙手し，試験監督者に伝えること．

3．このページの最上部の欄に受験番号のみ記入しなさい．ここ以外の箇所に受験番号，氏名を書いてはいけません．

4．問題は全部で 20 問あります．このうち任意の 15 問を選んで解答しなさい．選択した問題番号を，下の選択問題番号欄に記入しなさい．

5．それぞれの問題の下に解答の道筋を書き，四角の中に答を記入しなさい．

6．計算用紙は別に配布します．

選択問題番号

第１問

$f(x) = \cos x \sin x$ について

（1）１階導関数 $\dfrac{d\,f(x)}{dx}$ を求めよ．

（2）n 階の導関数 $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ を求めよ．

第 2 問

s は下式のように 3 つの異なる正の数 x, y, z およびそれらの 3 つの数の逆数 $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ の和で表わされる． s のとりうる値の範囲を求めよ．

$$s = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

第 3 問

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ d \end{pmatrix}$$

を満たす整数 a, b, c, d **について，** c **と** d **の積が取り得る自然数の最小値を求めよ.**

第 4 問

長軸半径 a，短軸半径 b の楕円に内接する長方形のうち，面積が最大となるものの面積を求めよ．

第 5 問

微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = bx(1 - ax)$$

を解く．ここに a, b は正の実数とし，初期条件を $t = 0$ で $x = x_0$ とする．

(1) まず，$x = \dfrac{1}{y}$ と変数変換を行う．このとき $\dfrac{dx}{dt}$ を y と $\dfrac{dy}{dt}$ で表せ.

(2) 与えられた微分方程式を y についての微分方程式に直し, それを解いて x の時間変化を求めよ.

(3) $t \to \infty$ のときに x がどうなるか示せ.

第 6 問

次式で表される xy 平面上の曲線 C を考える．

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}$$

曲線 C 上の $t = 2$ に対応する点において接線 T を引く．曲線 C に引かれる接線のうち，接線 T と垂直となる接線の曲線 C 上の接点を求めよ．

第 7 問

立方体（正六面体）の 8 個の頂点から 3 個の頂点をランダムに選ぶとき，これら 3 個の頂点がつくる三角形が二等辺三角形となる確率を求めよ.

第 8 問

3 辺の長さがそれぞれ $2, \sqrt{13}, 5$ の三角形の面積を求めよ．

第 9 問

4 つの整数 A，B，C，D（A＜B＜C＜D）があり，それらの 2 つずつの和が 24，29，35，36，42，47 であるとき，Dの値を求めよ.

第 10 問

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$ **の値を求めよ.**

第 11 問

A, B, C, D が 1 から 9 までの整数のうちのそれぞれ異なる数字であるとき, 下の式を満足する A と B の組み合わせをすべて求めよ.

$$
\begin{array}{rr}
 & AB \\
+ & AB \\
\hline
 & DBC
\end{array}
$$

第 12 問

点 P(x, y) は連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

を満たすものとする．$t = 0$ で原点以外の点から出発した点 P(x, y) は，t が増加するにつれてどのようにふるまうか述べよ．図を用いてもよい．

第 13 問

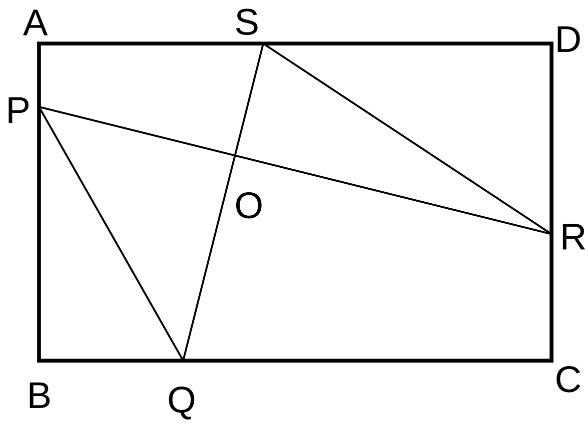
半径２の円Ａの中に半径１の円Ｂがそれぞれ最下部を接して入っている．このときの円Ｂの最上部の点を点Ｐとする．円Ｂが円Ａに接したままその内周をすべることなく転がって一周し元の位置に戻るまでの間の点Ｐの軌跡を図示せよ．

第 14 問

一辺の長さが 1 の正四面体に内接する球の半径を求めよ.

第 15 問

長方形ＡＢＣＤの各辺上に，図のように４つの点Ｐ，Ｑ，Ｒ，Ｓ をとりＰＲとＱＳの交点をＯとする．三角形ＰＱＯと三角形ＲＳＯの面積が等しく，それぞれ 30 ㎠ であるとき，長方形ＡＢＣＤの面積を求めよ．但し， $\overline{\mathrm{AS}} = 8$ cm**，** $\overline{\mathrm{PB}} = 10$ cm**，** $\overline{\mathrm{QC}} = 12$ cm**，** $\overline{\mathrm{RD}} = 8$ cm**である．**



第 16 問

6 桁の整数があり，一の位は「9」であった．いまこの「9」を一番上の位に移し，他の数字の位をひとつずつ下げてつくった 6 桁の整数は，元の整数の 4 倍になった．元の整数を求めよ．

第 17 問

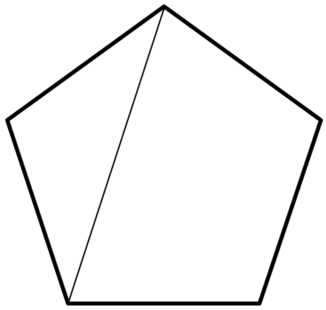
10,000 円札を 100 円玉，50 円玉，10 円玉の 3 種類のコインの組み合わせへ両替する方法は何通りあるか. 1 種類のコインまたは 2 種類のコインしか使わない場合も含めるものとする.

第 18 問

ある長さの 1 本の棒をランダムに選んだ場所で切る．できた 2 本の棒のうち長い方を再びランダムに選んだ場所で切る．このようにしてできた 3 本の棒切れで三角形が構成できる確率はいくらか．棒の太さは考えないものとする．

第 19 問

正五角形における一辺と対角線の長さの比は $2:(\sqrt{5}+1)$ である．これを参考にして，定木（目盛りはないものとする）とコンパスを用いて正五角形を作図する方法を説明せよ．



第 20 問

3 人がチームとなって行う帽子の色当てゲームを考える．3 人はそれぞれ赤色または白色のどちらかの帽子をランダムにかぶせられる．自分の帽子の色は見えない．他のふたりの帽子の色は見えるが，それを言葉やサインで伝えることはできないものとする. 3 人は同時に自分の帽子の色が何であるかにつき, 赤, 白, パスのどれかを答える．パスは，正解ではないが，間違いでもないものとする．勝敗の基準を次とする．3 人のうち少なくともひとりが正解し，かつ，間違えた者がひとりもいなければそのチームの勝ちとする．さて，3 人はどのように解答するかの戦略をあらかじめ相談しておくことができる．この戦略によってチームとして勝つ確率をどのように上げられるか考えてみよう.

(1) 3 人がそれぞれランダムに赤，白，パスのどれかを答えるとしたら，このときチームが勝つ確率はいくらか.

(2)簡単に思いつく戦略として，3 人のうちふたりはパスと答え，ひとりは常に赤と答える戦略が考えられる．このときチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ である．これよりも優れた戦略として，3 人が互いに他のふたりの帽子の色を見て，もしふたりの帽子の色が異なっていればパスと答え，ふたりの帽子の色が同じであれば, 自分の帽子の色についてそれと違う方の色を答えるという戦略がある．このときにチームが勝つ確率はいくらか.