数学１Ａ（佐々）　試験問題（2008.3.3）

１．次の問に答えよ。

（１）$\dfrac{dy}{dx} = x(y^2-1)$ の一般解を求めなさい。

（２）$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y}{x}$ の一般解を求めなさい。

（３）線分 $C : y = x (0 \leq x \leq 1)$ に対する線積分 $\displaystyle\int_C xy\ ds$ の値を求めなさい

（４）３次元空間 (x, y, z) で定義されたスカラー場: $\phi = x^2 + y^2 + z^2$ とベクトル場: $\boldsymbol{A} = (x+y-z, -x+y+z, x-y+z)$ に対し、(a) $\mathrm{grad}\phi$、(b) $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$、(c) $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ を求めなさい。

２．次の微分方程式の一般解を求めよ。

（１）$\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = \sin x$

（２）$\dfrac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$

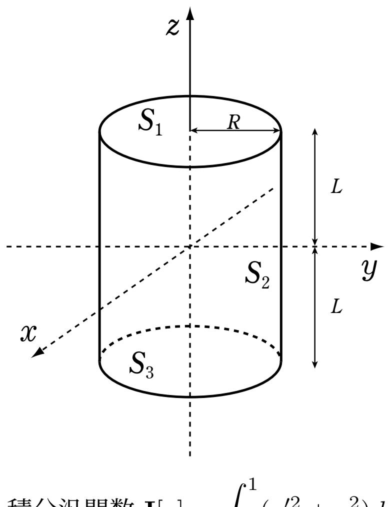
３．下図のように、半径 R、高さ $2L$ の円柱があり、上面、側面、下面をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とする。また、この S_1, S_2, S_3 上で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \ \left(\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z),\ |\boldsymbol{r}| = \sqrt{r^2+z^2}\right)$$

とする。以下の問に答えよ。

（１）S_1 上 $[S_1 : \boldsymbol{r}(r, \varphi) = r\cos\varphi\boldsymbol{i} + r\sin\varphi\boldsymbol{j} + L\boldsymbol{k}]$ の
面積分 $Q_1 = \displaystyle\iint_{S_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^R rdr\int_0^{2\pi} d\varphi\frac{L}{[r^2+L^2]^{\frac{3}{2}}}$ を求めよ。

（２）同様にして S_2 上の面積分 $Q_2 = \displaystyle\iint_{S_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$ と S_3 上の面積分 $Q_3 = \displaystyle\iint_{S_3} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$ を求め、$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 4\pi$ であることを示せ。［ヒント：S_2 上で $d\boldsymbol{S} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)Rd\varphi dz$］



４．積分汎関数 $\mathbf{I}[y] = \displaystyle\int_0^1 (y'^2 + y^2)dx$ に対する停留値問題を考える $[0 \leq x \leq 1]$。ここで、y に対する境界条件は $y(0) = 1, y(1) = 0$ とする。以下の問に答えよ。

（１）この問題に対する Euler 方程式を導き、y および $\mathbf{I}[y]$ の値を求めよ。

（２）試行関数: $y(x) = ax^2 - (1+a)x + 1[a$ はパラメター$]$ を用いて、直接法から a を適当に選び $\mathbf{I}[y]$ の停留値の近似値を求めよ。

解答例（略解）…正答であるという保障はありません

1.（1）$y=-\dfrac{Ce^{x^2}+1}{Ce^{x^2}-1}$（$C$ は積分定数）

（2）$y=Cx^2-x$（C は積分定数）

（3）$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

（4）(a) $2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=(2x,2y,2z)$

(b) 3

(c) $-2(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=(-2,-2,-2)$

2.（1）特性方程式の解が -1（重解）だから、斉次の解は $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$（C_1,C_2 は積分定数）。
特殊解を未定係数法で決めて、一般解は $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}-\dfrac{1}{2}\cos x$

（2）行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 2 & -3 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ の固有値は、$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(-2,-1,1)$ であり、固有値それぞれに対する固有ベクトルは順に ${}^t(1,0,-1),{}^t(0,1,-1),{}^t(1,1,1)$

よって、$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_1\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}e^{-2x}+C_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}e^{-x}+C_3\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}e^{x}$

（C_i は積分定数）

3.（1）$Q_1=2\pi L\displaystyle\int_0^R\frac{r}{(r^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}dr=2\pi L\left[-\frac{1}{(r^2+L^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^R=2\pi-\frac{2\pi L}{\sqrt{R^2+L^2}}$

（2）ヒントより、$Q_2=\displaystyle\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-L}^{L}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dz$ ここで、$z=R\tan\theta$ と置換すると $\tan\theta=\frac{L}{R}$ を満たす θ を α（$0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$）として、

$$Q_2=\cdots=2\pi\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta d\theta=\frac{4\pi L}{\sqrt{R^2+L^2}}$$

また $Q_3=Q_1$ なので、$Q_1+Q_2+Q_3=4\pi$

4.（1）$f=y'^2+y^2$ とすると、この問題の Euler 方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0\Leftrightarrow y''=y$$

となる。この Euler 方程式の一般解は、$y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ であり、境界条件より $y=-\dfrac{1}{e^2-1}e^x+\dfrac{e^2}{e^2-1}e^{-x}$ となる。このとき、$\mathbf{I}[y]=\dfrac{e^2+1}{e^2-1}(\sim 1.313035..)$

（2）試行関数を使うと、$\mathbf{I}(a)=\dfrac{11a^2-5a+40}{30}$ となる。
$\dfrac{d\mathbf{I}}{da}=0$ を解いて、$a=\dfrac{5}{22}$。このとき、$\mathbf{I}=\dfrac{347}{264}\sim 1.314$