問３，問４：重積分

2005 年度問 3

$D=\{(x,y)\mid 1\le x\le 2, 1\le xy\le 2x\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D x^3y\,dxdy$$

2005 年度問 4

次の各積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$ ただし，$D=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0\}$

(2) $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z}}$ ただし，$D=\{(x,y,z)\mid 0\le z\le 1-(x^2+y^2)\}$

2004 年度問 3

λ を正定数とし，$x\ge 0$ における連続関数 $f(x)$ に対し

$$F_\lambda=\int_0^x (x-y)^\lambda f(y)\,dy \qquad (x\ge 0)$$

とする．このとき $\displaystyle\int_0^x F_\lambda(t)\,dt$ は $F_{\lambda+1}(x)$ の定数倍であることを示しその定数 (λ に依る) を求めよ．

2004 年度問 4

$D=\{(x,y,z)\mid 0\le z\le 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_D z\sqrt{1-x^2-y^2+z^2}\,dxdydz$$

2003 年度問 3

平面 $x+y+z=1$ と 3 つの座標面とによって囲まれた領域を D とするとき，

積分 $\displaystyle\iiint_D y\,dxdydz$ の値を求めよ．

2003 年度問 4

D を中心原点，半径 1 の円とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

2002 年度問 3

$D=\{(x,y,z)\mid \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_D x^2z\,dxdydz$$

2002 年度問 4（教科書演習問題 115 改）

$D=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\ge 1\}$ とするとき，次の積分が存在するための実数 β の条件を求め，

そのときの積分の値を求めよ．

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\beta}$$

2001 年度問 3

$x,y,z\ge 0, x+y+z\le 1$ で定まる領域を D とするとき次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$$

2001 年度問 4

f を区間 $[0,1]$ 上の C^1 級関数とするとき，$\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} f'(x^2+y^2)\,dxdy=\pi$

であるためには $f(1)-f(0)=1$ が必要十分であることを証明せよ．

2000 年度問 3

次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\, dy$$

2000 年度問 4

$D = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; x, y, z \geq 0, x + y + \sqrt{z} \leq 1\right\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ.

$$\iiint_D z\, dxdydz$$

2000 年度問 5

a, b, c を正定数とするとき次の関係式が成り立つことを示し，その値を求めよ.

$$\iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1} (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz = abc \iiint_{u^2+v^2+w^2\leq 1} (a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2)\, dudvdw$$

1992 年度問 1

n を自然数とするとき，領域 $x^2 + y^2 + z^{2n} < 1$ の体積を求めよ.

1992 年度問 3

積分 $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}(2+x^2+y^2)}$ の値を求めよ.

演習問題：積分，重積分編

問 32(2003/10/15)(教科書演習問題 83-(3) 改)

次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

問 33(2003/10/29)

正数 a, b が $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(a+bx^4)^{\frac{1}{2}}} = 1$ を満たすとき

$$\int_0^1 \frac{dx}{(a+bx^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2a}\left\{1 + \frac{1}{(a+b)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

であることを示せ.

問 34(2003/10/29)(教科書演習問題 85-(2))

$\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{\left(e^{t+x}\right)}\, dt\right)$ を計算せよ.

問 37(2003/11/12)

$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$ の値を求めよ.

問 44(2003/11/26)(教科書演習問題 102-(5) 改)

$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y, y^2 - x^2 \leq 1\right\}$ のとき

$\displaystyle\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2}\, dxdy$ の値を求めよ.

問 45(2003/12/10)(教科書演習問題 104)

区間 $[0, \infty)$ 上の関数 φ，ψ に対し

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_0^x \varphi(t)\psi(x-t)dt$$

により，区間 $[0, \infty)$ 上の関数 $\varphi * \psi$ を定義する．f，g，h が区間 $[0, \infty)$ 上の連続関数なら

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

が成り立つことを証明せよ.

問 46(2003/12/10)

$0 \leq x, y, z \leq 1$, $y+z \leq x$, $y \leq x^2$ で定まる領域を D とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_D z\,dxdydz$$

問 47(2003/12/10)

以下で定まる立体の体積を求めよ．

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+z \leq 1, \quad x, y, z \geq 0$$

問 49(2004/01/14)

(1)　$f(x)$ が $\mathbf{R}$ 上の連続関数で $a(x)$，$b(x)$ が $\mathbf{R}$ 上の微分可能な関数ならば

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt\right) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

が成り立つことを示せ．

(2)　$x > 0$ に対し

$$f(x) = \int_x^{x+1}\left\{\int_x^y e^{z^2}\,dz\right\}dy$$

とするとき $f''(x)$ を積分を含まない形で表せ．

問 51(2004/01/14)(教科書演習問題 108)

実数 a，b が $a^2+b^2=1$ をみたすとき，連続関数 $f(x)$ に対し

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(ax+by)\,dxdy = 2\int_{-1}^{1} f(u)\sqrt{1-u^2}\,du$$

が成り立つことを示せ．

($u = ax+by$，$v = -bx+ay$ として変数変換してみよ．)

問 52(2004/01/14)

$D = \left\{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\right\}$ のとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_D x^2 z\,dxdydz$$

問 45'(2005/12/14)

曲線 $y = x^3$ と直線 $x+y=2$ と直線 $x=-1$ とで囲まれた領域（境界も含む）を D とするとき，

積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ の値を求めよ．

問 52'(2006/01/11)(教科書演習問題 107-(5))

$D = \left\{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4, x \geq 0\right\}$ とするとき次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_D xe^{-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz$$

教科書演習問題 103-(1)

以下で定まる立体の体積を求めよ．

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq 1, x, y, z \geq 0$$

2005 年度問 3

$s=x\,,t=xy$ と変数変換する.
積分範囲は $1\leq s\leq 2\,,1\leq t\leq 2s$ に変わり,
$x=s\,,\,y=\dfrac{t}{s}$ より Jacobian は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{t}{s^2} & \dfrac{1}{s} \end{vmatrix} = \frac{1}{s}$$

$$\iint_D x^3y\,dxdy = \int_1^2 ds\int_1^{2s} s^2t\left(\frac{1}{s}\right)dt$$
$$= \int_1^2 ds\,\left[\frac{st^2}{2}\right]_1^{2s}$$
$$= \int_1^2 ds\,\left(2s^3-\frac{1}{2}s\right) = \left[\frac{1}{2}s^4-\frac{1}{4}s^2\right]_1^2 = \underline{-\frac{27}{4}}$$

2005 年度問 4

(1)　極座標変換し,
$x=r\sin\theta\cos\varphi\,,\,y=r\sin\theta\sin\varphi\,,\,z=r\cos\theta.$
積分範囲は $0\leq r\leq 1\,,0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\,,0\leq\varphi\leq 2\pi$ に変わり
Jacobian は $r^2\sin\theta.$

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}\,dr$$
$$= \big[-\cos\theta\big]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\big[\varphi\big]_0^{2\pi}\cdot\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}\,dr = 2\pi\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}\,dr$$

$t=\sqrt{1+r^2}+r$ と置換して
$r=\dfrac{t^2-1}{2t}\,,\,\sqrt{1+r^2}=\dfrac{t^2+1}{2t}\,,\,\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{t^2+1}{2t^2}$ より

$$2\pi\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}\,dr = 2\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{(t^2-1)^2}{4t^3}\,dt$$
$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{t^2}{2}-2\log t-\frac{1}{2t^2}\right]_1^{1+\sqrt{2}} = \underline{\pi(\sqrt{2}-\log(1+\sqrt{2}))}$$

(2)
$$\iiint_D\frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z}}$$
$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1}dxdy\int_0^{1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}}\frac{dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z}}$$
$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1}dxdy\,\left[2\sqrt{1+x^2+y^2+z}\right]_0^{1-(x^2+y^2)}$$
$$= 2\iint_{x^2+y^2\leq 1}dxdy\,(\sqrt{2}-\sqrt{1+x^2+y^2})$$

極座標変換して $x=r\cos\theta\,,\,y=r\sin\theta\,.$
積分範囲は $0\leq r\leq 1\,,0\leq\theta\leq 2\pi$, Jacobian は $r.$

$$= 2\int_0^{2\pi}d\theta\,\int_0^1(\sqrt{2}-\sqrt{1+r^2})r\,dr$$
$$= 2\cdot\big[\theta\big]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2}r^2-\frac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$= 2\cdot 2\pi\cdot\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-(-\frac{1}{3})\right\} = \underline{\frac{2\pi}{3}(2-\sqrt{2})}$$

2004 年度問 3

$F_\lambda(x)=\displaystyle\int_0^x(x-y)^\lambda f(y)\,dy$ より

$$\begin{aligned}\int_0^x F_\lambda(t)dt &= \int_0^x dt\int_0^t(t-y)^\lambda f(t)\,dy\lambda \\ &= \int_0^x dy\int_y^x(t-y)^\lambda f(t)\,dt \quad \text{(積分順序交換)} \\ &= \int_0^x dy\left[\frac{(t-y)^{\lambda+1}}{\lambda+1}f(t)\right]_y^x \\ &= \int_0^x\frac{1}{\lambda+1}(x-y)^{\lambda+1}f(x)\,dy = \underline{\frac{1}{\lambda+1}F_{\lambda+1}(x)}\end{aligned}$$

2004 年度問 4

$$\iiint_D z\sqrt{1-x^2-y^2+z^2}\,dxdydz$$
$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1}dxdy\,\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}}z\sqrt{1-x^2-y^2+z^2}\,dz$$
$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1}dxdy\,\left[\frac{1}{3}(1-x^2-y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= \frac{1}{3}\iint_{x^2+y^2\leq 1}dxdy\big\{(2-2\sqrt{x^2+y^2})^{\frac{3}{2}}-(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\big\}$$

極座標変換して $x=r\cos\theta\,,\,y=r\sin\theta\,.$
積分範囲は $0\leq r\leq 1\,,0\leq\theta\leq 2\pi$, Jacobian は $r.$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\big\{r(2-2r)^{\frac{3}{2}}-r(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\big\}$$

ここで $\displaystyle\int_0^1 r(1-r)^{\frac{3}{2}}\,dr = \int_0^1\left((1-r)^{\frac{3}{2}}-(1-r)^{\frac{5}{2}}\right)dr$

$$= \left[-\frac{2}{5}(1-r)^{\frac{5}{2}}+\frac{7}{2}(1-r)^{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{5}-\frac{2}{7} = \frac{4}{35}$$
$$\int_0^1 -r(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\,dr = \left[\frac{1}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = -\frac{1}{5}$$
$$\therefore\quad \text{与式} = \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}\frac{4}{35}-\frac{1}{5}\right) = \underline{\frac{2(8\sqrt{2}-7)\pi}{105}}$$

2003 年度問 3

$$\iiint_D y\,dxdydz$$
$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}y\,dz^{*1}$$
$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}y(1-x-y)\,dy$$
$$= \int_0^1 dx\,\left[\frac{(1-x)}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{1-x}$$
$$= \int_0^1\frac{1}{6}(1-x)^3\,dx$$
$$= \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{4}(1-x)^4\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{24}}$$

*1 以下重積分は z,y,x の順に計算しているが別にどの順番でもよい.

2003 年度問 4

極座標変換して $x = r\cos\theta\,,\, y = r\sin\theta\,.$
積分範囲は $0 \le r \le 1\,,\, 0 \le \theta \le 2\pi$，Jacobian は r.

$$\iint \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r\,dr}{\sqrt{1+r^2}}$$
$$= 2\pi\left[(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \underline{2\sqrt{2}\pi - 2\pi}$$

2002 年度問 3

$$\iiint_D x^2 z\,dxdydz = \int_0^1 dz \iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} x^2 z\,dxdy$$

$\displaystyle\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} x^2 z\,dxdy$ に対し，
極座標変換して $x = r\cos\theta\,,\, y = r\sin\theta\,.$
積分範囲は $0 \le r \le z\,,\, 0 \le \theta \le 2\pi$，Jacobian は r.

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} x^2 z\,dxdy$$
$$= z\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (r\cos\theta)^2 r\,dr$$
$$= z\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta \int_0^z r^3\,dr$$
$$= z\cdot\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}sin2\theta\right]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{4}\right]_0^z = \frac{\pi}{4}z^5$$
$$\therefore\quad 与式 = \frac{\pi}{4}\int_0^1 z^5\,dz = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{6} = \underline{\frac{\pi}{24}}$$

2002 年度問 4

広義積分であるので $1 \le x^2+y^2+z^2 \le R^2$ として $R \to \infty$ の極限を考える．極座標変換し，
$x = r\sin\theta\cos\varphi\,,\, y = r\sin\theta\sin\varphi\,,\, z = r\cos\theta.$
積分範囲は $1 \le r \le R\,,\, 0 \le \theta \le \pi\,,\, 0 \le \varphi \le 2\pi$ に変わり
Jacobian は $r^2\sin\theta$.

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\beta}$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_1^R r^{2-2\beta}\,dr$$
$$= [\varphi]_0^{2\pi}\cdot[-\cos\theta]_0^{\pi}\cdot\int_1^R r^{2-2\beta} = 4\pi\int_1^R r^{2-2\beta}\,dr$$

(i)　$2-2\beta = -1$ のとき
$\displaystyle\int_1^R r^{2-2\beta}\,dr = \int_1^R \frac{1}{r}\,dr = \log R$
これは $R \to \infty$ で発散.

(ii)　$2-2\beta \ne -1$ のとき
$\displaystyle\int_1^R r^{2-2\beta}\,dr = \left[\frac{1}{3-2\beta}r^{3-2\beta}\right]_1^R = \frac{1}{3-2\beta}(R^{3-2\beta}-1)$
これは $3-2\beta > 0$ で発散．$3-2\beta < 0$ で収束.

$$\therefore\quad 積分の値が存在 \Leftrightarrow \underline{\beta > \frac{3}{2}},\ その値は\ \underline{\frac{4\pi}{2\beta-3}}$$

2001 年度問 3

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3}$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[-\frac{1}{2}(x+y+z+1)^{-2}\right]_0^{1-x-y}$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}(x+y+1)^{-2}\right) dy$$
$$= \int_0^1 dx \left[-\frac{1}{8}y - \frac{1}{2}(x+y+1)^{-1}\right]_0^{1-x}$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{8}(x-1) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x+1)^{-1}\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{16}(x-1)^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\log(x+1)\right]_0^1 = \underline{\frac{\log 2}{2} - \frac{5}{16}}$$

2001 年度問 4

極座標変換して $x = r\cos\theta\,,\, y = r\sin\theta\,.$
積分範囲は $0 \le r \le 1\,,\, 0 \le \theta \le 2\pi$，Jacobian は r.

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} f'(x^2+y^2)\,dxdy$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rf'(r^2)\,dr$$
$$= [\theta]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{2}f(r^2)\right]_0^1 = \pi\bigl(f(1)-f(0)\bigr)$$
$$\therefore \iint_{x^2+y^2\le 1} f'(x^2+y^2)\,dxdy = \pi \Leftrightarrow f(1)-f(0) = \pi$$

2000 年度問 3

積分順序交換して
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\,dy$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^y \frac{\sin y}{y}\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \left(y\cdot\frac{\sin y}{y}\right)$$
$$= [-\cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{1}$$

2000 年度問 4

$$\iiint_D z\,dxdydz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{(1-x-y)^2} z\,dz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\frac{1}{2}(1-x-y)^4\right)$$
$$= \int_0^1 dx \left[-\frac{1}{10}(1-x-y)^5\right]_0^{1-x}$$
$$= \int_0^1 dx \left(\frac{1}{10}(1-x)^5\right)$$

$$= \left[-\frac{1}{60}(1-x)^6\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{60}}$$

2000 年度問 5

左辺について，$x = au\,, y = bv\,, z = cw$ と変数変換し，積分範囲は $u^2+v^2+w^2 \le 1$ に変わり，Jacobian は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

$$\therefore \iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1} (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$$
$$= abc\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)\,dudvdw$$

極座標変換し，

$u = r\sin\theta\cos\varphi\,, v = r\sin\theta\sin\varphi\,, w = r\cos\theta.$

積分範囲は $0 \le r \le 1\,, 0 \le \theta \le \pi\,, 0 \le \varphi \le 2\pi$ に変わり

Jacobian は $r^2\sin\theta.$

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} u^2\,dudvdw$$
$$= \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\int_0^1 r^4\,dr$$
$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\cos 2\varphi+1)\,d\varphi\int_{-1}^1(1-t^2)\,dt\int_0^1 r^4\,dr$$

($t=\cos\theta$と置換)

$$= \left[\frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\varphi\right]_0^{2\pi}\cdot\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^1\cdot\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1 = \frac{4\pi}{15}$$

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} v^2\,dudvdw$$
$$= \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\int_0^1 r^4\,dr$$
$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi\int_{-1}^1(1-t^2)\,dt\int_0^1 r^4\,dr$$

($t=\cos\theta$と置換)

$$= \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi}\cdot\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^1\cdot\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1 = \frac{4\pi}{15}$$

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} w^2\,dudvdw$$
$$= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^1 r^4\,dr$$

($t=\cos\theta$と置換)

$$= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^1 t^2\,dt\int_0^1 r^4\,dr = \frac{4\pi}{15}$$

$\therefore$ 値は $\dfrac{4\pi abd}{15}(a^2+b^2+c^2)$

1992 年度問 1

$x^2+y^2+z^{2n} \le 1-\varepsilon$ として $\varepsilon \to +0$ の極限を考える．

体積は $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^{2n}<1-\varepsilon} 1\,dxdydz$

$$= \int_{-\sqrt[2n]{1-\varepsilon}}^{\sqrt[2n]{1-\varepsilon}}dz\iint_{x^2+y^2<1-z^{2n}-\varepsilon}1\,dxdy$$

$\displaystyle\iint_{x^2+y^2<1-z^{2n}-\varepsilon}1\,dxdy$ は半径 $\sqrt{1-z^{2n}-\varepsilon}$ の円の面積．

$$= 2\int_0^{\sqrt[2n]{1-\varepsilon}}(1-z^{2n}-\varepsilon)\pi\,dz$$
$$= 2\pi\int\left[(1-\varepsilon)z - \frac{1}{2n+1}z^{2n+1}\right]_0^{\sqrt[2n]{1-\varepsilon}}$$
$$= 2\pi\left(\sqrt[2n]{1-\varepsilon}\,\frac{2n+(2n+2)\varepsilon}{2n+1}\right)$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}2\pi\sqrt[2n]{1-\varepsilon}\,\frac{2n+(2n+2)\varepsilon}{2n+1} = \underline{\frac{4\pi n}{2n+1}}$$

1992 年度問 3

広義積分であるので $x^2+y^2 \le R$ として $R\to\infty$ の極限を考える．極座標変換して $x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$．

積分範囲は $0\le r\le R\,, 0\le\theta\le 2\pi$，Jacobian は r.

$$\iint_{\mathbf{R}^2}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}(2+x^2+y^2)}$$
$$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{r\,dr}{r(2+r^2)}$$
$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}\,R}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{1+r'^2}\,dr' \quad \left(r' = \frac{r}{\sqrt{2}}\text{と置換}\right)$$
$$= \sqrt{2}\,\pi\left[\tan^{-1}r'\right]_0^{\sqrt{2}\,R} = \sqrt{2}\pi\tan^{-1}(\sqrt{2}\,R)$$
$$\lim_{R\to\infty}\sqrt{2}\pi\tan^{-1}(\sqrt{2}\,R) = \underline{\frac{\sqrt{2}\pi^2}{2}}$$

問 32(2003/10/15)(教科書演習問題 83-(3) 改)

(1) $t=\cos\theta$ と置換して

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int_1^{-1}\frac{-dt}{1+t^2} = \left[\tan^{-1}t\right]_{-1}^1 = \underline{\frac{\pi}{2}}$$

(2) $t=\pi-x$ と置換して

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int_{\pi}^0\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}(-1)\,dt$$
$$= \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}$$
$$\therefore \quad \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \underline{\frac{\pi^2}{4}}$$

問 33(2003/10/29)

$$\int_0^1\frac{dx}{(a+bx^4)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^1\frac{(a+bx^4)-bx^4}{(a+bx^4)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^1\frac{dx}{(a+bx^4)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{a}\int_0^1\frac{bx^4}{(a+bx^4)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\int_0^1\left(-\frac{1}{2(a+bx^4)^{\frac{1}{2}}}\right)'x\,dx$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{a}\left[\frac{x}{2(a+bx^4)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{dx}{2(a+bx^4)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{a}\frac{1}{2(a+b)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a}\left(1 + \frac{1}{(a+b)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

問 34(2003/10/29)(教科書演習問題 85-(2))

(解法 1)　$s = e^{t+x}$ で置換し，$\dfrac{ds}{dt} = e^{t+x} = s$ より

$$\int_0^x e^{e^{t+x}}\,dt = \int_{e^x}^{e^{2x}} \frac{e^s}{s}\,ds$$
$$\frac{d}{dx}\left(\int_{e^x}^{e^{2x}} \frac{e^s}{s}\,ds\right) = \frac{e^{e^{2x}}}{e^{2x}}\left(2e^{2x}\right) - \frac{e^{e^x}}{e^x}\left(e^x\right)$$
$$= \underline{2e^{e^{2x}} - e^{e^x}}$$

(解法 2)　$f(u,v) = \displaystyle\int_0^u e^{e^{t+v}}\,dt$ と 2 変数関数と考え，

$u = x$, $v = x$ とした上で x で微分する．

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^u e^{e^{t+v}}\,dt\right)$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}\right)\int_0^u e^{e^{t+v}}\,dt$$
$$= 1\cdot e^{e^{u+x}} + 1\cdot\int_0^u e^{e^{t+v}}e^{t+v}\,dt$$
$$= e^{e^{u+x}} + \left[e^{e^{t+v}}\right]_0^u$$
$$= e^{e^{u+x}} + e^{e^{u+v}} - e^{e^v} = \underline{2e^{e^{2x}} - e^{e^x}}$$

問 37(2003/11/12)

(解法 1)　$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta \quad (x = \sin\theta\text{と置換})$$
$$= [\theta - \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{1 + \frac{\pi}{2}}$$

(解法 2)　$t = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ と置換．

$x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{4t}{(t^2+1)^2}$ より

$$\int_1^\infty \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$$
$$= \int_1^\infty 2t\left(-\frac{1}{t^2+1}\right)'\,dt$$
$$= -\left[\frac{2t}{t^2+1}\right]_1^\infty + 2\int_1^\infty \frac{dt}{t^2+1}$$
$$= 1 + 2\left[\tan^{-1}t\right]_1^\infty = \underline{1 + \frac{\pi}{2}}$$

問 44(2003/11/26)(教科書演習問題 102-(5) 改)

$$\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2}\,dxdy$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{x}{1+x^2+y^2}\,dy$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\frac{1}{1+t^2}(\sqrt{1+x^2})\,dt \quad (y = t\sqrt{1+x^2})$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)dx \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$
$$= \left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 \cdot \left[\tan^{-1}t\right]_0^1 = \underline{\frac{\pi}{4}(\sqrt{2}-1)}$$

問 45(2003/12/10)(教科書演習問題 104)

定義より $x \geq 0$ に対し

$$\Big((f*g)*h\Big)(x)$$
$$= \int_0^x (f*g)(t)\,h(x-t)\,dt$$
$$= \int_0^x \left(\int_0^t f(s)\,g(t-s)\,ds\right)h(x-t)\,dt$$
$$= \int_0^x \left(\int_s^x f(s)\,g(t-s)\,h(x-t)\,dt\right)ds \quad (\text{順序交換})$$
$$= \int_0^x f(s)\left(\int_s^x g(t-s)\,h(x-t)\,dt\right)ds$$
$$= \int_0^x f(s)\left(\int_0^{x-s} g(\xi)\,h(x-s-\xi)\,d\xi\right)ds \quad (\xi = t-s)$$
$$= \int_0^x f(s)\,(g*h)(x-s)\,ds$$
$$= \Big(f*(g*h)\Big)(x)$$

問 46(2003/12/10)

$$\iiint_D z\,dxdydz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \int_0^{x-y} z\,dz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \left(\frac{1}{2}(x-y)^2\right)$$
$$= \int_0^1 dx \left[-\frac{1}{6}(x-y)^3\right]_0^{x^2}$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^1 dx\,\left(-(x-x^2)^3 + x^3\right)$$
$$= \frac{1}{6}\left[x^6 - 3x^5 + 3x^4\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{7} - \frac{3}{6} + \frac{3}{5}\right) = \underline{\frac{17}{420}}$$

問 47(2003/12/10)

体積は $\displaystyle\iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+z\leq 1} 1\,dxdydz$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy \int_0^{1-\sqrt{x}-\sqrt{y}} 1\,dz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy\,(1-\sqrt{x}-\sqrt{y})$$
$$= \int_0^1 dx \left[(1-\sqrt{x})y - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{(1-\sqrt{x})^2}$$
$$= \int_0^1 dx \left(\frac{1}{3}(1-\sqrt{x})^3\right)$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (1-t)^3(2t)\,dt \quad (\sqrt{x} = t\text{ と置換})$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \left((1-t)^3 - (1-t)^4\right)\,dt$$
$$= \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{4}(1-t)^4 + \frac{1}{5}(1-t)^5\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \underline{\frac{1}{30}}$$

問 49(2004/01/14)

(1) $\displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = \int_0^{b(x)} f(t)\,dt - \int_0^{a(x)} f(t)\,dt$
ここで合成関数の微分公式より
$\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_0^{b(x)} f(t)\,dt\right) = f\bigl(b(x)\bigr)b'(x)$
$\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_0^{a(x)} f(t)\,dt\right) = f\bigl(a(x)\bigr)a'(x)$
$\displaystyle\therefore\quad \frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt\right) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$

(2) $\displaystyle f(x) = \int_x^{x+1}\left\{\int_x^y e^{z^2}\,dz\right\}dy$
$\displaystyle = \int_x^{x+1} dz \int_z^{x+1} e^{z^2}\,dy$ (順序交換)
$\displaystyle = \int_x^{x+1} dz\,\left((x+1-z)e^{z^2}\right)$
$\displaystyle = (x+1)\int_x^{x+1} e^{z^2}\,dz - \int_x^{x+1} ze^{z^2}\,dz$

$\displaystyle f'(x) = \int_x^{x+1} e^{z^2}\,dz + (x+1)\left(e^{(x+1)^2} - e^{x^2}\right)$
$\displaystyle -\left((x+1)e^{(x+1)^2} - xe^{x^2}\right) = \int_x^{x+1} e^{z^2}\,dz - e^{x^2}$
$f''(x) = (x+1)e^{(x+1)^2} - xe^{x^2} - 2xe^{x^2}$
$= \underline{e^{(x+1)^2} - (2x+1)e^{x^2}}$

問 51(2004/01/14)(教科書演習問題 108)

$u = ax+by,\ v = -bx+ay$ と変数変換する.
$a^2+b^2=1$ より $x = au-bv$, $y = bu+av$, $x^2+y^2 = u^2+v^2$
Jacobian は $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2+b^2 = 1$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by)\,dxdy = \iint_{u^2+v^2\le 1} f(u)\,dudv$$
$\displaystyle = \int_{-1}^1 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u)\,dv = 2\int_{-1}^1 f(u)\sqrt{1-u^2}\,du$

問 52(2004/01/14)

$$\iiint_D x^2z\,dxdydz$$
$\displaystyle = \iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 x^2z\,dz$
$\displaystyle = \iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy\,\left[\frac{1}{2}x^2z^2\right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^1$
$\displaystyle = \frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 1} x^2\left(1-(x^2+y^2)\right)\,dxdy$

極座標変換して $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.
積分範囲は $0\le r\le 1$, $0\le\theta\le 2\pi$, Jacobian は r.

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^1(1-r^2)r^3\,dr$
$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta\int_0^1(r^3-r^5)\,dr$
$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\theta\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{6}r^6\right]_0^1 = \underline{\frac{\pi}{24}}$

問 45'(2005/12/14)

積分範囲は $D = \bigl\{(x,y)\bigm| -1\le x\le 1\,,\ x^3\le y\le 2-x\bigr\}$ より,
$$\iint_D xy\,dxdy$$
$\displaystyle = \int_{-1}^1 dx\int_{x^3}^{2-x} xy\,dy$
$\displaystyle = \int_{-1}^1 dx\,\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{x^3}^{2-x}$
$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (x(2-x)^2 - x^7)\,dx$
$\displaystyle = \int_0^1 -4x^2\,dx = \underline{-\frac{4}{3}}$

問 52'(2006/01/11)(教科書演習問題 107-(5))

$D = \bigl\{(x,y,z)\bigm| x^2+y^2+z^2\le 4, x\ge 0\bigr\}$ とするとき次の積分の値を求めよ.
$$\iiint_D xe^{-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz$$
$\displaystyle \iint_{x^2+y^2\le 4} dxdy\int_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} xe^{-x^2-y^2-z^2}\,dx$
$\displaystyle \iint_{x^2+y^2\le 4} dxdy\,\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2-y^2-z^2}\right]_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$
$\displaystyle -\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 4}(e^{-4} - e^{-(x^2+y^2)})\,dxdy$

極座標変換して $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.
積分範囲は $0\le r\le 2$, $0\le\theta\le 2\pi$, Jacobian は r.

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(e^{-4} - e^{-r^2})r\,dr$
$\displaystyle = -\pi\int_0^2(re^{-4} - re^{-r^2})\,dr$
$\displaystyle = -\pi\left[\frac{1}{2}r^2e^{-4} + \frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^2 = \underline{\frac{\pi}{2}(1-5e^{-4})}$

教科書演習問題 103-(1)

$$\iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le 1} 1\,dxdydz$$
$\displaystyle = \int_0^1 dx\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy\int_0^{(1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} 1\,dz$
$\displaystyle = \int_0^1 dx\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy\,(1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$
$\displaystyle = \int_0^1 dx\,\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{4}{3}(1-\sqrt{x})y^{\frac{3}{2}} + (1-\sqrt{x})y\right]_0^{(1-\sqrt{x})^2}$
$\displaystyle = \int_0^1 dx\,\left(\frac{1}{6}(1-\sqrt{x})^4\right)$
$\displaystyle = \frac{1}{6}\int_0^1 2t(1-t)^4\,dt$ ($\sqrt{x} = t$ と置換)
$\displaystyle = frac13\left[-\frac{1}{5}(1-t)^5 + \frac{1}{6}(1-t)^6\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{90}}$