問２:積分とパラメータ

2005 年度問 2

実数 α に対し $I_\alpha = \int_0^1 dx \int_0^x \left(\frac{1-y}{1-x}\right)^\alpha e^y\,dy$ とする.

(1)　I_α が存在するための α の条件を求めよ.

(2)　α が (1) の条件をみたすとき，I_α の値を求めよ.

2004 年度問 2

実数 α に対し $I_\alpha = \int_0^\infty x^\alpha \log\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$ とする.

(1)　$I_{-\frac{1}{2}}$ の値を計算せよ.

(2)　I_α が存在するための α の条件を求めよ.

2003 年度問 2

実数 α に対し $I_\alpha = \int_1^\infty \frac{\log x}{(1+x)^\alpha}\,dx$ とする.

(1)　I_2 の値を求めよ.

(2)　積分 I_α が存在するための α の条件を求めよ.

2002 年度問 2

実数 α に対し $I_\alpha = \int_0^1 \frac{\log x}{(1-x^2)^\alpha}\,dx$ とする.

(1)　I_α が存在するための α の条件を求めよ.

(2)　$I_{\frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\theta)\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin 2\theta)\,d\theta$ であることを示し，$I_{\frac{1}{2}}$ の値を求めよ.

2001 年度問 2

実数 α に対し $I_\alpha = \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^\alpha}\,dx$ とする.

(1)　I_α が存在するための α の条件を求めよ.

(2)　$I_\alpha > 0$ であるための α の条件を求めよ.

2000 年度問 2

(1)　次の積分のうち収束するものを選び，その値を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx \qquad \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

(2)　次の積分が収束するための実数 α の条件を求めよ，
また，積分の値をベータ関数で表せ.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha}$$

1992 年度問 4

$[0,\infty)$ 上の連続関数 f に対し関数 $I_\alpha f$ を

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt$$

で定義する（ただし，$\alpha > 0$ であり $\Gamma(\alpha)$ は $Gamma$ 関数を表す）.
このとき，任意の $\alpha, \beta > 0$ に対し $I_\alpha(I_\beta f) = I_{\alpha+\beta} f$ が成立することを証明せよ.

ヒント：任意の $\alpha, \beta > 0$ に対し

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

が成立することを思い出せ.

演習問題：積分とパラメータ編

問 38(2003/11/12)

　実数 α に対し $I_\alpha = \displaystyle\int_1^2 (x^2-1)^\alpha\,dx$ とするとき

(1)　I_α が収束するための α の条件を求めよ.

(2)　$I_{-\frac{1}{2}}$ の値を求めよ.

問 41(2003/11/26)

　実数 $\alpha > 0$ に対し $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\infty x^\alpha \tan^{-1} x\,dx$ とするとき

(1)　I_α が収束するための α の条件を求めよ.

(2)　$I_{-\frac{3}{2}}$ の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ であることを用いてもよい.

予備知識

　以下の問題ではランダウの記号 $O(\ )$ を使うことになります.
ランダウの記号には $O(\ )$ と $o(\ )$ の 2 種類がありますが，ここで使うのは O の方です.
定義：2 つの関数 $f(x), g(x)$ に対し，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は $x \to a$ で有界になるとき（有限値に収束するとき）
$f(x) = O(g(x))$ または，$f(x) = O(g(x))\ (x \to a)$ と表す.

以下のように $\log x$ の極限での増減を x のべき乗の増減で近似 (?) できます.
$\forall\varepsilon > 0$ に対して $\log x = O\left(\dfrac{1}{x^\varepsilon}\right)\ (x \to 0)$
$\forall\varepsilon > 0$ に対して $\log x = O(x^\varepsilon)\ (x \to \infty)$
$\log(x+1) = O(x)\ (x \to 0)$
$\log x = O(x-1)\ (x \to 1)$
これらを使う場合はロピタルの定理（$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するなら $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$）を使い

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-\varepsilon}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\log x)'}{(x^{-\varepsilon})'} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{-\varepsilon x^\varepsilon} = 0$$
$$\lim_{x\to \infty}\frac{\log x}{x^{\varepsilon}} = \lim_{x\to \infty}\frac{(\log x)'}{(x^{\varepsilon})'} = \lim_{x\to \infty}\frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\log(x+1))'}{(x)'} = \lim_{x\to \infty}\frac{1}{x+1} = 1$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\log x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$$

と示してから使ってください.
また解答の見通しが立っている場合には ε には最初から小さい値を入れてもいいでしょう.

広義積分の収束条件として
$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ や $\displaystyle\int_c^a f(x)dx$ の $f(x)$ が $x \to a$ で有界でなくても
$\mu < 1$ かつ $f(x) = O\left(\dfrac{1}{(x-a)^\mu}\right)\ (x \to a) \Rightarrow$ 積分は収束　(μ-テスト)
$\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ の $f(x)$ が $x \to \infty$ で有界でなくても
$\lambda > 1$ かつ $f(x) = O\left(\dfrac{1}{x^\lambda}\right)\ (x \to \infty) \Rightarrow$ 積分は収束　(λ-テスト)
があり，問 2 の中心です.

$f(x) = O(g(x))\ (x \to a)$ の時には
$f(x) = O(-g(x))\ (x \to a)$，$f(x)p(x) = O(g(x)p(x))\ (x \to a)$,
$p(x) = O(q(x))\ (x \to a)$ に対し $f(x)p(x) = O(g(x)q(x))\ (x \to a)$,
が定義より成立します.
以下の解答は定義に従って書いているのでこれらは使っていませんが，使っても差し支えないと思われます.

2005 年度問 2

(1)　$I_\alpha = \iint_D \left(\dfrac{1-y}{1-x}\right)^\alpha e^y\,dxdy$ であり
$D = \left\{(x,y) \,\middle|\, x,y \geq 0, y \leq x \leq 1\right\}$ である．
$x \to 1$ のときに関数が有界でなくなるので
$D_k = \left\{(x,y) \,\middle|\, x,y \geq 0, y \leq x \leq k\right\}$ 上での積分で $k \to 1$ の極限を考える．[*1]

(i)　$\alpha = 1$ の場合
積分順序交換をして

$$\int_0^k dy \int_y^k \frac{1-y}{1-x} e^y\,dx$$
$$= \int_0^k dy\left[-(1-y)e^y \log(1-x)\right]_y^k$$
$$= \int_0^k \left\{-(1-y)e^y\log(1-k) + (1-y)e^y\log(1-y)\right\} dy$$

第一項に関して，$\displaystyle\int_0^k -(1-y)e^y\,dy$ は被積分関数が積分区間で有界なので，この値は有限な値になる．
よって $\log(1-k)\displaystyle\int_0^k -(1-y)e^y\,dy$ は $k \to 1$ で発散．

第二項に関して，$\displaystyle\int_0^1 (1-y)e^y\log(1-y)\,dy$ は $y \to 1$ で広義積分だが
ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{y\to 1}\frac{\log(1-y)}{(1-y)^{-1}} = \lim_{y\to 1} -(1-y) = 0$
よって $\displaystyle\lim_{y\to 1}(1-y)e^y\log(1-y) = 0$
よって $(1-y)e^y\log(1-y) = O(\dfrac{1}{(1-y)^0})\quad (y \to 1)$
$0 < 1$ なので $\displaystyle\int_0^1 (1-y)e^y\log(1-y)\,dy$ は収束する．

ゆえに，積分全体は収束しない．[*2]

(ii)　$\alpha \neq 1$ の場合
積分順序交換をして

$$\int_0^k dy\left[-\frac{(1-y)^\alpha e^y(1-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_y^k$$
$$= \int_0^k dy\,\frac{e^y}{\alpha-1}\left(\frac{(1-y)^\alpha}{(1-k)^{\alpha-1}} - (1-y)\right)$$
$$= \frac{1}{(\alpha-1)(1-k)^{\alpha-1}}\int_0^k e^y(1-y)^\alpha\,dy$$
$$-\frac{1}{\alpha-1}\int_0^k (1-y)e^y\,dy$$

ここで $\displaystyle\int_0^1 e^y(1-y)^\alpha\,dy$，$\displaystyle\int_0^1 (1-y)e^y\,dy$ は共に被積分関数が積分区間で有界なので，値は有限な値になる．
よって全体の収束，発散は分母の $(1-k)^{\alpha-1}$ に依り，
$\alpha > 1$ で発散，$\alpha < 1$ で収束．

$\therefore$　I_α が存在 $\Leftrightarrow$ $\alpha < 1$ [*3]

(2)　積分順序交換をして

$$I_\alpha = \int_0^1 dy\int_y^1 \left(\frac{1-y}{1-x}\right)^\alpha e^y\,dx$$
$$= \int_0^1 dy\left[-\frac{(1-y)^\alpha\,e^y(1-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_y^1$$
$$= \int_0^1 dy\,\frac{e^y(1-y)}{1-\alpha}$$

ここで $\displaystyle\int_0^1 e^y(1-y)\,dy = [e^y(1-y)]_0^1 + \int_0^1 e^y\,dy$
$= -1 + (e-1) = e-2$

$\therefore$　$\alpha < 1$ のとき $I_\alpha = \dfrac{e-2}{1-\alpha}$

2004 年度問 2

(1)

$$I_{-\frac{1}{2}} = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)dt$$
$$= \int_\infty^0 t\log(1+t^2)\left(-2\frac{1}{t^3}\right)dt \quad \left(t = \frac{1}{\sqrt{x}}\text{と置換}\right)$$
$$= 2\int_0^\infty \frac{1}{t^2}\log(1+t^2)\,dt$$

$$\int\frac{1}{t^2}\log(1+t^2)\,dt = \left(-\frac{1}{t}\right)\log\left(1+t^2\right) - \int\left(-\frac{1}{t}\right)\frac{2t}{1+t^2}\,dt$$
$$= -\frac{\log(1+t^2)}{t} + 2\tan^{-1}t$$

$\dfrac{\left(log(1+t^2)\right)'}{(t)'} = \dfrac{2t}{1+t^2}$ なのでロピタルの定理より

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t^2)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{2t}{1+t^2} = 0$$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log(1+t^2)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{2t}{1+t^2} = 0$$

$$\therefore I_{-\frac{1}{2}} = 2\left[-\frac{\log(1+t^2)}{t} + 2\tan^{-1}t\right]_0^\infty = 2\pi$$

(2)　$t = \dfrac{1}{x}$ と置換し，$I_\alpha = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}\,dt$ と書き直す．
$t \to 0$ と $t \to \infty$ のとき広義積分になるので

$I_\alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}\,dt + \int_1^\infty \frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}\,dt$ と分けて調べる．

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{1+t} = 1$ より
$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}t^{\alpha+1} = 1$
すなわち $\dfrac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}} = O\left(\dfrac{1}{t^{\alpha+1}}\right)\ (t \to 0)$
$\alpha < 0$ のとき $\alpha + 1 < 1$ より $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}\,dt$ は収束．

[*1] x か y の片方を先に計算する累次積分の方法は使えない．その方法が使える条件は $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ が積分可能であると分かっていることだからである．そもそもこの問題では y で先に積分することは $x = 1$ のときは関数の分母が 0 より無理．x で積分して出てくる発散した値を y で積分するのも無理．

[*2] 第一項が発散してることが分かっているが第二項を調べたのは，第一項の発散は正の発散なので，負値の関数を積分している第二項が発散すると積分全体は収束することもありうるからである．

[*3] 以上の過程を踏まず，いきなり x を積分区間 [0,1] で積分すると答えには $1 < \alpha$ も含まれてしまう．しかし正答はこれだと思う．

$\alpha=0$ のとき
$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1$ より $\dfrac{\log(1+t)}{t}$ には区間 $(0,1]$ で最小値 $m>0$ が存在する.

よって $\log(1+t)\geq mt \quad (0<t\leq 1)$ が成立するので
$$\int_0^1\frac{\log(1+t)}{t^2}\,dt\geq\int_0^1\frac{m}{t}\,dt=m\big[\log t\big]_0^1$$
ゆえに積分は発散するので積分全体も発散.

$\alpha>0$ のときは $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}\,dt\geq\int_0^1\frac{\log(1+t)}{t^2}dt$

ゆえに上同様に積分全体は発散. [*4]

$^\forall\varepsilon>0$ に対し，ロピタルの定理より
$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log(1+t)}{t^\varepsilon}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\varepsilon t^{\varepsilon-1}+\varepsilon t^\varepsilon}=0 \text{ なので}$$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}t^{\alpha+2-\varepsilon}=0$$
すなわち $\dfrac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}=O\left(\dfrac{1}{t^{\alpha+2-\varepsilon}}\right)\quad(t\to\infty)$

$\alpha>-1$ のとき $\varepsilon=\dfrac{\alpha+1}{2}$ として $\alpha+2-\varepsilon=\dfrac{\alpha+3}{2}>1$

より $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}\,dt$ は収束.

$\alpha=-1$ のとき
$$\int_1^\infty\frac{\log(1+t)}{t}\,dt\geq\int_1^\infty\frac{\log(1+t)}{1+t}\,dt=\frac{1}{2}\big[(\log(1+t))^2\big]_1^\infty$$
ゆえに積分は発散するので積分全体も発散.

$\alpha<-1$ のときは $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}\,dt\geq\int_1^\infty\frac{\log(1+t)}{t}\,dt$

ゆえに上同様積分全体は発散.

$\therefore\quad I_\alpha$ が存在 $\Leftrightarrow\ -1<\alpha<0$

2003 年度問 2

(1) $\displaystyle I_2=\int_1^\infty\frac{\log x}{(1+x)^2}dx$

$$\begin{aligned}\int\frac{\log x}{(1+x)^2}\,dx&=\left(-\frac{1}{1+x}\right)\log x\,dx-\int\left(-\frac{1}{1+x}\right)\frac{1}{x}\,dx\\&=-\frac{\log x}{1+x}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx\\&=-\frac{\log x}{1+x}+\log\left|\frac{x}{x+1}\right|\end{aligned}$$

ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{1+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$

よって $\displaystyle I_2=\left[-\frac{\log x}{1+x}+\log\left(\frac{x}{1+x}\right)\right]_1^\infty=-\log\frac{1}{2}=\log 2$

(2) $x\to\infty$ のとき広義積分になる.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{(1+x)^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)}=1$$
$\forall\varepsilon>0$ に対し，ロピタルの定理より
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\varepsilon}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon}=0$$
よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{(1+x)^\alpha}x^{\alpha-\varepsilon}=0$

すなわち $\dfrac{\log x}{(1+x)^\alpha}=O\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}\right)=0\quad(x\to\infty)$

$\alpha>1$ のとき $\varepsilon=\dfrac{\alpha-1}{2}$ として

$\alpha-\varepsilon=\dfrac{\alpha+1}{2}>1$ より $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{(1+x)^\alpha}\,dx$ は収束.

$\alpha=1$ のとき
$$\int_1^\infty\frac{\log x}{(1+x)}\,dx\geq\int_1^\infty\frac{\log x}{2x}\,dx=\frac{1}{4}\big[(\log x)^2\big]_1^\infty$$
ゆえに積分は発散.

$\alpha<1$ のときは $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{(1+x)^\alpha}\,dx\geq\int_1^\infty\frac{\log x}{1+x}\,dx$

ゆえに上同様積分は発散.

$\therefore\quad I_\alpha$ が収束 $\Leftrightarrow\ \alpha>1$

2002 年度問 2

(1) $x\to 0,\ x\to 1$ で広義積分になるので

$\displaystyle I_\alpha=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\log x}{(1-x^2)^\alpha}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\log x}{(1-x^2)^\alpha}\,dx$ と分けて調べる.

$^\forall\varepsilon>0$ に対して，ロピタルの定理より
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-\varepsilon}}=\lim_{x\to 0}-\frac{x^\varepsilon}{\varepsilon}=0$$
よって $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{(1-x^2)^\alpha x^{-\varepsilon}}=0$

すなわち $\dfrac{\log x}{(1-x^2)^\alpha}=O\left(\dfrac{1}{x^\varepsilon}\right)\quad(x\to 0)$

例えば $\varepsilon=\dfrac{1}{2}<1$ とすることで $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\log x}{(1-x^2)^\alpha}\,dx$ は収束.

ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}=\lim_{x\to 1}-\frac{1}{x}=-1$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}\log x}{(1-x)^\alpha(1+x)^\alpha}=-\frac{1}{2^\alpha}$

すなわち $\dfrac{\log x}{(1-x^2)^\alpha}=O\left(\dfrac{1}{(1-x)^{\alpha-1}}\right)\quad(x\to 1)$

$\alpha<2$ のとき $\alpha-1<1$ より $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\log x}{(1-x^2)^\alpha}\,dx$ は収束.

$\alpha=2$ のとき
ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{-\log x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$ なので

$\dfrac{-\log x}{1-x}$ には区間 $[\frac{1}{2},1)$ で最小値 $m>0$ が存在する.

よって $-\log x\geq m(1-x)\quad\left(\dfrac{1}{2}\leq x\leq 1\right)$ が成立するので
$$-\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\log x}{(1-x^2)^2}\,dx\geq\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{m(1-x)}{(1-x)^2 2^2}\,dx=\frac{m}{4}\big[-\log(1-x)\big]_{\frac{1}{2}}^1$$
ゆえにこの積分は発散するので積分全体も発散. [*5]

$\alpha>2$ のときは $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\log x}{(1-x^2)^\alpha}\,dx\geq\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\log x}{(1-x^2)^2}\,dx$

ゆえに上同様に積分全体は発散.

$\therefore\quad I_\alpha$ が存在 $\Leftrightarrow\ \alpha<2$

(2) $x=\sin\theta$ と置換し

[*4] 不等式は $0<t\leq 1$ に依存している．以下でも同じことに注意.

[*5] 最初の積分で部分積分しても発散することは示せる.

$$I_{\frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin\theta)}{(1-\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}}\cos\theta\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\theta)\, d\theta$$
$\theta = 2\varphi$ と置換し
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin 2\varphi) 2\, d\varphi$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\log 2 + \log(\sin\theta) + \log(\cos\theta))\, d\theta \quad (\theta \text{ に戻した})$$

ここで $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos\theta) d\theta$ について $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$ と置換し
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin\phi)(-d\phi) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\theta) d\theta$$
$$\therefore \quad I_{\frac{1}{2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2\, d\theta + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\theta)\, d\theta = \frac{\pi\log 2}{2} + 2I_{\frac{1}{2}}$$
$$\therefore \quad I_{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi\log 2}{2}$$

2001 年度問 2

(1) $x \to 0$, $x \to \infty$ で広義積分になるので
$I_\alpha = \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^\alpha}\, dx + \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^\alpha}\, dx$ と分けて調べる.

$^\forall\varepsilon > 0$ に対して, ロピタルの定理より
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^{-\varepsilon}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^\varepsilon}{-\varepsilon} = 0$$
よって $\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{(1+x^\alpha)x^{-\varepsilon}} = 0$
すなわち $\frac{\log x}{1+x^\alpha} = O\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right) \quad (x \to 0)$
例えば $\varepsilon = \frac{1}{2} < 1$ と定めることで $\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^\alpha}\, dx$ は収束.

$^\forall\varepsilon > 0$ に対して, ロピタルの定理より
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\varepsilon} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0$$
よって $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{1+x^\alpha} x^{\alpha-\varepsilon} = 0$
すなわち $\frac{\log x}{1+x^\alpha} = O\left(\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}\right) \quad (x \to \infty)$
$\alpha > 1$ のとき $\varepsilon = \frac{\alpha-1}{2}$ として $\alpha - \varepsilon = \frac{\alpha+1}{2} > 1$
より $\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^\alpha}\, dx$ は収束.

$\alpha = 1$ のとき $\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x}\, dx \geq \int_1^\infty \frac{\log x}{2x}\, dx = \frac{1}{4}\left[(\log x)^2\right]_1^\infty$
ゆえにこの積分は発散するので積分全体も発散.
$\alpha < 1$ のときは $\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^\alpha}\, dx \geq \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x}\, dx$
ゆえに上同様にこの積分は発散するので積分全体も発散.

$$\therefore \quad I_\alpha \text{ が存在 } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

(2) $I_\alpha = \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^\alpha}\, dx + \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^\alpha}\, dx$
これの第一項を $x = \frac{1}{t}$ と置換し
$$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^\alpha}\, dx = \int_\infty^1 \frac{\log\frac{1}{t}}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^\alpha}\left(-\frac{1}{t^2}\, dt\right) = -\int_1^\infty \frac{t^{\alpha-2}\log t}{1+t^\alpha}\, dt$$

よって $I_\alpha = \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^\alpha}(1-x^{\alpha-2})\, dx$

$x = 1$ では被積分関数 $= 0$
$$1 < x \text{ では} \begin{cases} 1 < \alpha < 2 & \Leftrightarrow \quad \text{被積分関数} > 0 \\ 2 \geq \alpha & \Leftrightarrow \quad \text{被積分関数} \leq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad I_\alpha > 0 \Leftrightarrow 1 < \alpha < 2$$

2000 年度問 2

(1) $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_0^\infty$ (発散)
$$\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$
よって $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx$ が収束し, その値は $\frac{1}{2}$

(2) $x \to \infty$ のとき広義積分になる.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2\alpha}}{(1+x^2)^\alpha} = 1$$
すなわち $\frac{1}{(1+x^2)^\alpha} = O\left(x^{2\alpha}\right) \quad (x \to \infty)$
$\alpha > \frac{1}{2}$ のとき $2\alpha > 1$ より $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^\alpha}\, dx$ は収束.

$\alpha = \frac{1}{2}$ のとき $t = \sqrt{x^2+1} + x$ と置換して
$x = \frac{t^2-1}{2t}$, $\sqrt{1+x^2} = \frac{t^2+1}{2t}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2+1}{2t^2}$ より
$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_1^\infty t dt = \frac{1}{2}\left[t^2\right]_1^\infty$$
ゆえに積分は発散.
$\alpha < \frac{1}{2}$ のときは $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha} \geq \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$
ゆえに上同様積分は発散.

$$\therefore \quad \alpha > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{積分が収束.}$$

ベータ関数 $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$
を $x = \sin^2\theta$ で置換し
$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\, d\theta$$

$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha}$ を $x = \tan\theta$ で置換し
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^\alpha}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2\alpha-2}\, d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2}\right)$$

1992 年度問 4

ごめんなさい. 解けません.
ただ「思い出せ」の前に習っていないので
範囲外の筈です.

問 38(2003/11/21)

(1)$x \to 1$ のとき広義積分となる.

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)^\alpha}{(x-1)^\alpha} = 2^\alpha$$

すなわち $(x^2-1)^\alpha = O\left(\frac{1}{(x-1)^{-\alpha}}\right) \quad (x \to 1)$

$\alpha > -1$ のとき $-\alpha < 1$ より $\int_1^2 (x^2-1)^\alpha\,dx$ は収束.

$\alpha = -1$ のとき

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \left[\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]_1^2$$

ゆえに積分は発散.

$\alpha < -1$ のときは $\int_1^2 \frac{1}{(x^2-1)^\alpha}\,dx \geq \int_1^2 \frac{1}{x^2-1}\,dx$

ゆえに上と同様積分は発散.

$$\therefore \quad I_\alpha \text{ が収束} \Leftrightarrow \alpha > -1$$

(2)　$t = \sqrt{x^2-1} + x$ と置換して

$x = \frac{t^2+1}{2t}$, $\sqrt{x^2-1} = \frac{t^2-1}{2t}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2-1}{2t^2}$ より

$$I_{-\frac{1}{2}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int_1^{2+\sqrt{3}} \frac{dt}{t} = \log(2+\sqrt{3})$$

問 41(2003/11/26)

(1)　関数は $x \to 0,\ x \to \infty$ で広義積分となるので

$I_\alpha = \int_0^1 x^\alpha \tan^{-1}x\,dx + \int_1^\infty x^\alpha \tan^{-1}x\,dx$ と分けて調べる.

ロピタルの定理より $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$

よって $\lim_{x\to 0} (x^\alpha \tan^{-1}x) x^{-1-\alpha} = 1$

すなわち $x^\alpha \tan^{-1}x = O\left(\frac{1}{x^{-1-\alpha}}\right) \quad (x \to 0)$

$\alpha > -2$ のとき $-1-\alpha < 1$ より $\int_0^\infty x^\alpha \tan^{-1}x\,dx$ は収束.

$\alpha = -2$ のとき

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}x}{x} = 1$ より関数 $\frac{\tan^{-1}x}{x}$ には区間 $(0,1]$ で最小値

$m > 0$ が存在する.

よって $\tan^{-1}x \geq mx \quad (0 < x \leq 1)$ が成立するので

$$\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx \geq \int_0^1 \frac{m}{x}\,dx = m\big[\log(x)\big]_0^1$$

ゆえにこの積分は発散するので積分全体も発散.

$\alpha < -2$ のときは $\int_0^1 x^\alpha \tan^{-1}x\,dx \geq \int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$

ゆえに上と同様この積分は発散するので積分全体でも発散.

$1 \leq x$ のとき $\frac{\pi}{4} \leq \tan^{-1}x \leq \frac{\pi}{2}$ より

$x^\alpha \tan^{-1}x = O\left(\frac{1}{x^{-\alpha}}\right) \quad (x \to \infty)$

$\alpha < -1$ のとき $-\alpha > 1$ より $\int_1^\infty x^\alpha \tan^{-1}x\,dx$ は収束.

$\alpha \geq -1$ のとき

$$\int_1^\infty x^\alpha \tan^{-1}x\,dx \geq \frac{\pi}{4(\alpha+1)}\left[x^{\alpha+1}\right]_1^\infty$$

ゆえに積分は発散するので積分全体でも発散.

$$\therefore \quad I_\alpha \text{ が収束} \Leftrightarrow -2 < \alpha < -1$$

(2)　$I_{-\frac{3}{2}} = \int_0^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$

$$= \left[-2x^{-\frac{1}{2}}\tan^{-1}x\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

第一項について, $\frac{(\tan^{-1}x)'}{(x^{\frac{1}{2}})'} = \frac{2x}{1+x^2}$ なので

ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}x}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\tan^{-1}x}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to \infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

よって $\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\tan^{-1}x\right]_0^\infty = 0$

第二項は $t = \sqrt{x}$ と置換すれば $4\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4}$ となる.

$$\therefore \quad I_{-\frac{3}{2}} = \sqrt{2}\,\pi$$