数学ＩＡ (上村) シケプリ：後期過去問編

製作：岡根

2007 年 1 月 19 日

問１:証明問題

2005 年度問 1

次の各命題は正しいか．正しい場合には証明し，偽である場合には反例を挙げよ．

(1)　f を $\mathbf{R}$ 上の C^1 級関数で $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$ とするとき，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)dx=0$ である．

(2)　f を $\mathbf{R^2}$ 上における（Jordan の意味で）零集合 D 上の有界な関数とするとき，$\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy=0$ である．

2004 年度問 1

２重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$（リーマン積分，$D$ は $\mathbf{R}^2$ における有界集合で f は D で定義された有界な関数とする）について次の問に答えよ．

(1)　２重積分の定義を述べよ．

(2)　２重積分が存在するための f と D の十分条件を (１つ) 述べよ (証明は不要).

2003 年度問 1(教科書演習問題 90)

$f(x)$ を区間 [0,1] において有界で積分可能な関数で $f(x)>0$ であるとする．

更に，$\log f(x)$ も区間 [0,1] において有界で積分可能とする．このとき，

$$\log\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \geq \int_0^1 \log f(x)dx$$

となることを証明せよ．

ヒント：積分の定義と相加相乗平均

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$$

を利用せよ．相加相乗平均は証明せずに用いてよい．

2002 年度問 1

有界閉区間 [a,b] で定義された関数 $f(x)$ について，次の命題は正しいか誤りかを判定し，

正しいなら証明し誤りならば判例を挙げよ．

(1)　$f(x)$ が [a,b] で有界で積分可能であれば，$f(x)$ は連続である．

(2)　$f(x)$ が [a,b] で連続であれば，$f(x)$ のグラフ $A=\big\{(x,f(x)) \bigm| a\leq x\leq b\big\}$ はジョルダンの意味で零集合である．

2001 年度問 1

$a<b$ とし，f を区間 [a,b] 上の連続関数とするとき，次を証明せよ．

ただし，f の [a,b] での最大値と最小値が存在することは証明なしで用いてよい．

(1)　$\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(\zeta)$ となる $\zeta(a\leq\zeta\leq b)$ が存在する．

(2)　$\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ は $a<x<b$ なる任意の x において微分可能である．

2000 年度問 1

$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right)dx = f(0)$ について，次の命題は正しいか誤りかを判定し，正しければ証明し誤りならば反例を挙げよ．

(1)　$f(x)$ が区間 [0,1] において連続ならば，上の式が成立する．

(2)　$f(x)$ が区間 [0,1] において積分可能ならば，上の式が成立する．

1992 年度問 2

平面内の有界集合 D に対し積分 $\iint_D 1\,dxdy$ が存在するならば D の境界は零集合である．これを証明せよ．

演習問題：証明問題編

問 29(2003/10/15)

(1)　$f(x)$ を区間 $[0,1]$ で積分可能な関数とするとき，極限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ が存在することを示せ.

(2)　次の極限の値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$$

問 31(2003/10/15)(教科書演習問題 84)

$x\geq 0$ で定義されている関数 $f(x)$ に対し

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt & (x>0)\\ f(x) & (x=0)\end{cases}$$

とするとき，次の命題を示せ．

$f(x)$ が単調増加連続関数 $\Rightarrow$ $F(x)$ も単調増加連続関数

問 35(2003/10/29)

区間 $[a,b]$ 上有界な関数 $f(x)$ に対し，次の命題を示せ．

$f(x)$ が積分可能 $\Rightarrow$ $|f(x)|$ も積分可能

($\sup|f|-\inf|f|$ と $\sup f-\inf f$ の大小を比較してみよ．)

問 36(2003/10/29)

$f(x)=\sin\frac{1}{x}$ とし，さらに $f(x)$ が次のように定義されたとき，その命題は正しいか誤りかを判定し，正しければ証明し誤りなら判例を挙げよ．

(1)　$f(0)=0$，区間 $[0,1]$ 上の関数 $\Rightarrow$ $f(x)$ は積分可能

(2)　$f(x)$ が区間 $(0,1]$ 上の関数　　$\Rightarrow$ $f(x)$ は一様連続

(3)　$f(x)$ が区間 $[1,\infty)$ の関数　　$\Rightarrow$ $f(x)$ は一様連続

問 40(2003/11/12)

$f(x)$ が区間 $(a,b]$ で連続な関数とするとき，次の命題を示せ．

$\int_a^b |f(x)|dx$ が収束 $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ も収束

問 42(2003/11/26)

(1)　部分積分により $0<a<b$ のとき $\left|\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx\right|\leq\frac{2}{a}$ であることを示せ．

(2)　Cauchy の収束判定法により $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ が収束することを示せ．

問 43(2003/11/26)(教科書演習問題 105)

$[0,1]\times[0,1]$ 上で定義された関数

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y\text{ は有理数})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

は積分可能であるかどうかを吟味せよ．

2005 年度問 1

(1)：正しい

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)dx = \lim_{a\to\infty, b\to-\infty}\int_b^a f'(x)dx$$
$$= \lim_{a\to\infty, b\to-\infty}[f(x)]_b^a$$
$$= \lim_{a\to\infty} f(a) - \lim_{b\to-\infty} f(b) = 0$$
$$(\because \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0)$$

(2)：正しい

$f(x,y)$ は D 上有界，零集合を除いて連続，D の境界が零集合という 3 条件を満たしているので積分可能.[*1][*2]

D は零集合．よって $^\forall\varepsilon > 0$ に対し D 全体を覆うことのできる有限個（N 個とする）の開長方形 $R_1, \ldots R_N$ で $\sum_{k=1}^{N}\mu(R_k) < \varepsilon$ となるものが存在する.[*3]

また f は有界であるので $|f(x,y)| \leq {}^\exists M$.

積分時の分割 Δ に R_k の分線[*4]を全て含むものを考えて

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| = \left|\sum_{i,j} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\mu(K_{ij})\right|$$
$$= \left|\sum_{K_{ij}\subset R_1\cup\ldots\cup R_n} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\mu(K_{ij})\right|$$
$$\leq \sum_{K_{ij}\subset R_1\cup\ldots\cup R_n} |f(\xi_{ij},\eta_{ij})|\mu(K_{ij})$$
$$\leq \sum_{K_{ij}\subset R_1\cup\ldots\cup R_n} M\mu(K_{ij}) = M\varepsilon$$

よって ε を $\dfrac{\varepsilon}{M}$ と取りなおし

$^\forall\varepsilon > 0$ に対して $\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| < \varepsilon$ とできる.

$$\therefore \quad \iint_D f(x,y)dxdy = 0$$

2004 年度問 1

(1)　D を含む長方形 $K = [a,b]\times[c,d]$ を考え K 上の関数 $\tilde{f}(x,y)$ を

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\in K\backslash D \end{cases}$$ と定義する.[*5]

分割 Δ を

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_j < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$

と $x_1, \ldots x_{i-1}, y_1, \ldots, y_{m-1}$ を取ることで定め，

$|\Delta|$ を $|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1}\}$ とする.

$K_{ij} = [x_i, x_{i-1}]\times[y_j, y_{j-1}]$ として，K_{ij} から任意の点 $(\xi_i,\eta_j)\in K_{ij}$ を取り，そのとき

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i,j}\tilde{f}(x,y)\mu(K_{ij})$$

が Δ と (ξ_i,η_j) のとり方によらず存在するなら

その値を $\iint_D f(x,y)dxdy$ と定義する.

(2)　D の境界は零集合かつ f の不連続点が零集合

(定理 7.3　有界関数 f が，f が零集合を除いて連続で，かつ D の境界は零集合ならば f は D 上積分可能　より．)

もしくはその特殊例として

・D の境界は零集合で f は D 上連続

・D が $[a,b]\times[c,d]$ で表され f は D 上連続　等.

2003 年度問 1

分割 $|\Delta|$ は区間 $[0,1]$ を $x_i = \dfrac{i}{n}$ で分割するものとする. $(i = 1,\ldots,n)$

$[0,1]$ で $f(x) > 0$ なので，相加相乗平均より

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \geq \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)}$$

両辺は正なので対数を取って

$$\log\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\right)$$
$$\geq \frac{1}{n}\log(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$$

(左辺)$= \log\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$

(右辺)$= \sum_{i=1}^{n}(\log f(x_i))(x_i - x_{i-1})$

すなわち

$$\log\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n}(\log f(x_i))(x_i - x_{i-1})$$

ここで $n\to\infty$ すなわち $|\Delta|\to 0$ と極限を取ることで

$$\log\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \geq \int_0^1 \log f(x)dx$$

2002 年度問 1

(1)：誤り

反例は $f(x) = \begin{cases} f(x) = 1 & (x = a) \\ f(x) = 0 & (a < x \leq b) \end{cases}$

このとき $0 \leq \sum_{k=1} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq (x_1 - x_0)$ [*6]

$$\therefore \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = 0$$

[*1] (定理 7.3)　これがそのまま 2004 年度問 1(2) の答えになる.

[*2] こうして分割が任意でいい事を断っておかないと以下の積分がうまくいかない

[*3] $\mu(K)$ は K の面積を表す

[*4] 辺のこと．この授業で長方形といったら辺が軸に平行なものを指す.

[*5] $K\backslash D$ とは D を除く K のこと

[*6] 和 $= x_1 - x_0$ となるのは $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1$ である ξ_1 が x_0 のとき

$f(x)$ は有界で積分可能で $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ となるが，$f(x)$ は連続でない．

(2):正しい

$[a,b]$ を N 等分する．（一つの幅は $\dfrac{a-b}{N}$）
$f(x)$ は有界閉区間で連続であるので一様連続．
よって $\forall\varepsilon$，$\alpha,\beta\in[a,b]$ に対して
$|\alpha-\beta|<\delta \Rightarrow |f(\alpha)-f(\beta)| < \dfrac{\varepsilon}{4(a-b)}$ となる δ が存在．

よって N を十分大きくとり $\dfrac{a-b}{N}<\delta$ とでき，そのとき各区間の中で (最大値-最小値)< $\dfrac{\varepsilon}{4(a-b)}$.

よってグラフ A は縦 $\dfrac{\varepsilon}{4(a-b)}$，横 $\dfrac{2(a-b)}{N}$ [*7]の各区間上の合計 N 個の開長方形で覆うことができ，その面積は
$\dfrac{\varepsilon}{4(a-b)} \times \dfrac{2(a-b)}{N} \times N = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

よって A は (ジョルダンの意味で) 零集合.

2001 年度問 1

(1)　f の $[a,b]$ での最大値，最小値を M,m とする．
$m\le f(x)\le M$ を $[a,b]$ で積分して
$m(b-a) \le \displaystyle\int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$
よって $m \le \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx \le M$

$f(x)$ は $[a,b]$ で連続だから
中間値の定理より任意の $y'\in[m,M]$ に対し
$f(x')=y'$ となる $x\in[a,b]$ が存在する

$$\therefore\quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\zeta) \text{ となる } \zeta(a\le\zeta\le b) \text{ が存在.}$$

(2)　$g(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ とする．
$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$ である．

f は $[a,b]$ 上で連続関数なので，$a<x<b$ である x に対し十分小さい h を持ってくれば f は $[x,x+h]$ 上で連続関数．
よって (1) を適用し
$\displaystyle\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f({}^{\exists}\xi) \qquad (x\le\xi\le x+h).$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \lim_{\xi\to x} f(\xi)\\ &= f(x)\ \text{（}\because f(x) \text{ は連続）}\end{aligned}$$

[*7] 横を 2 倍するのは長方形が「開」長方形であるので境界を含まないからである

2000 年度問 1

(1)：正しい

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(\frac{x}{n})dx &= n\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt \quad (t=\frac{x}{n} \text{ と置換})\\ &= \frac{1}{\frac{1}{n}-0}\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt\end{aligned}$$

平均値の定理より，$\dfrac{1}{\frac{1}{n}-0}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt = f(\xi)$ となる
$\xi\ (0\le\xi\le\dfrac{1}{n})$ が存在する．
$n\to+\infty$ で $\xi\to+0$ であるので

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(\frac{x}{n})dx &= \lim_{\xi\to+0} f(\xi) = f(0)\\ &= f(0) \quad (\because f(x) \text{ は } [0,1] \text{ で連続})\end{aligned}$$

(2)：誤り

反例は $f(x)=\begin{cases} f(x)=1 & (x=0)\\ f(x)=0 & (0<x\le 1)\end{cases}$

$0 \le \displaystyle\sum_{k=1}^m f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \le (x_1-x_0)$
$\therefore \displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) = 0$
$f(x)$ は $[0,1]$ において積分可能である．($\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=0$)
しかし，同様に計算すると $f(\dfrac{x}{n})$ の積分は n によらず
$\displaystyle\int_0^1 f(\frac{x}{n})dx = 0.$
よって $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(\frac{x}{n})dx = 0 \ne f(0)$

1992 年度問 2

f が積分可能であることは ${}^{\forall}\varepsilon>0$ に対し，$|\Delta|\to 0$ で
$S_\Delta - s_\Delta = \displaystyle\sum_{i,j}(\sup_{\xi_i,\eta_j\in K_{ij}} f(\xi_i,\eta_j) - \inf_{\xi_i,\eta_j\in K_{ij}} f(\xi_i,\eta_j))\mu(K_{ij}) < \varepsilon$
となることと同値である．

関数 f は $f(x,y)=\begin{cases} f(x)=1 & (x,y)\in D\\ f(x)=0 & (x,y)\in E\backslash D\end{cases}$ なので
$\left(\displaystyle\max_{\xi_i,\eta_j\in K_{ij}} f(\xi_i,\eta_j) - \min_{\xi_i,\eta_j\in K_{ij}} f(\xi_i,\eta_j)\right)$
は K_{ij} が D に入る点と入らない点の両方を持つ場合に限り 1，それ以外で 0 である．

そこでそのような K_{ij} を $R_1,R_2,\dots R_N$ とすれば最初の式は $S_\Delta - s_\Delta = \displaystyle\sum_{k=1}^N \mu(R_k) < \varepsilon$ となる．

D の境界はすべて $R_1,R_2,\dots R_N$ に含まれている．よってその中心を中心に $\sqrt{2}$[*8]倍拡大し，辺を除いた開長方形

[*8] 別に定数倍なら何でもよい

$R_1', R_2', \dots R_N'$ は D の境界全体を覆い [*9]，その面積の和は $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\mu(R_k') < 2\varepsilon$ よりいくらでも小さくできる．

$\therefore$ D の境界は零集合．

問 29(2003/10/15)

(1) 定積分の定義において分割 Δ が等分 $(x_k - x_{k-1} = \dfrac{1}{n}, \xi_k = \dfrac{k-1}{n})$ の場合を考える．

$f(x)$ は $[0{,}1]$ で積分可能なので
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(\xi_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)$
の $|\Delta| \to 0$ での極限値が存在する．

この場合 $|\Delta| \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$ であるから
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)$ が存在．
それは定積分の定義より $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

(2) $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1}$
$= \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} + \dfrac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \dfrac{1}{1+\frac{n-1}{n}}\right)$
$= \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k-1}{n}}\right)$
$f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ は $[0,1]$ 上で有界で連続なので積分可能．
(1) より
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \log 2$

問 31(2003/10/15)（教科書演習問題 84）

$x > 0$ のとき

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{x}f(x) - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{x^2}\int_0^x f(x)\,dt - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{x^2}\int_0^x \{f(x) - f(t)\}\,dt
\end{aligned}$$

$f(x)$ が単調増加関数であることより
$0 \le t < x$ で $f(t) < f(x) \Rightarrow F'(x) > 0$，つまり $F(x)$ は $x > 0$ で（微分可能なので）連続かつ単調増加である．

$x = 0$ のとき $F(x)$ は連続である．
$\because \displaystyle\lim_{x\to 0}F(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x-0}\left(\int_0^x f(t)dt - \int_0^0 f(x)dx\right)$
$= \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x f(t)dt_{(x=0)} = f(x)_{(x=0)} = f(0) = F(0)$ [*10]

$x = 0$ でも連続であるから，$F(x)$ は $x \ge 0$ で連続かつ単調増加．

問 35(2003/10/29)

$f(x)$ が積分可能であることと，$^\forall\varepsilon > 0$ に対し十分小さい分割（$|\Delta| <^\exists\delta$）をもって来れば
$S_\Delta - s_\Delta = \displaystyle\sum_k\Big(\sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x) - \inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)\Big)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$
となることは同値である．

ここで $\sup|f(x)| - \inf|f(x)| < \sup f(x) - \inf f(x)$ より [*11]
$f(x)$ が積分可能であるとき，$\forall\varepsilon > 0$ に対して
$|\Delta| < \delta \Rightarrow \displaystyle\sum_k(\sup|f(x)| - \inf|f(x)|)(x_k - x_{k-1})$
$< \displaystyle\sum_k(\sup f(x) - \inf f(x))(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$
よって $|f(x)|$ は積分可能．

問 36(2003/10/29)

(1) 不連続点がただ 1 つだけであるから積分可能．

(2) 一様連続ではない．反例として
$x_n = \dfrac{1}{2n\pi}, y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ がある．

これは $|x_n - y_n| \le x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ と $|x_n - y_n| \to 0$ でも
$\left|\sin\dfrac{1}{x_n} - \sin\dfrac{1}{y_n}\right| = 1$ と $|f(x_n) - f(y_n)|$ は小さくならず．
一様連続の定義 $|x - y| <^\exists\delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| <^\forall\varepsilon$ を満たさない．

(3) 一様連続である．$x, y \ge 1$ とすると

$$\begin{aligned}
\left|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}\right| &= \left|\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}}\frac{d}{dt}\sin t\,dt\right| \\
&= \left|\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}}\cos t\,dt\right| \\
&\le \left|\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}}|\cos t|\,dt\right| \\
&\le \left|\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}}dt\right| \\
&\le \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| \\
&= \frac{|x - y|}{|xy|} \\
&\le |x - y| \qquad (\because x, y \ge 1)
\end{aligned}$$

$\therefore$ $|x - y| <^\exists\delta(\equiv\varepsilon) \Rightarrow \left|\sin\dfrac{1}{x} - \sin\dfrac{1}{y}\right| <^\forall\varepsilon$
ゆえに $\sin\dfrac{1}{x}$ $(1 \le x < \infty)$ は一様連続である．

---

*9 分割の長方形は「閉」だが，零集合の定義に使う長方形は「閉」なので．つまり D の境界が R_i の辺上にある場合，それを開長方形で覆いたければより大きくしなければならない．

*10 今の導出で x の意味が変わっていることに注意．

*11 $\sup f(x) = a$，$\inf f(x) = b$ として a, b を正や負で場合分けすればよい．

問 40(2003/11/12)

コーシーの判定法より $\lim_{t \to a+0} g(t)$ が存在 $\Leftrightarrow$
$^\forall \varepsilon > 0$ に対し $a < t_1, t_2 < a + ^\exists \delta \Rightarrow |g(t_1) - g(t_2)| < \varepsilon$
である.

$g(t) = \int_t^b f(x)dx$ とする.
$\int_a^b |f(x)|dx$ が収束（絶対収束）するとき
$^\forall \varepsilon > 0$ に対し，$a < t_1, t_2 < a + ^\exists \delta$

$$\Rightarrow \Big| \int_{t_1}^b |f(x)|dx - \int_{t_2}^b |f(x)|dx \Big| < \varepsilon$$

これを $\Big| \int_{t_1}^b f(x)dx - \int_{t_2}^b f(x)dx \Big| \leq \Big| \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \Big|$
$\leq \int_{t_1}^{t_2} |f(x)|dx = \Big| \int_{t_1}^b |f(x)|dx - \int_{t_2}^b |f(x)|dx \Big|$
より $|f(x)|$ を $f(x)$ で置き換え，$\int_a^b f(x)dx$ は収束.

問 42(2003/11/26)

$$
\begin{aligned}
(1)\quad \int_a^b \frac{\sin x}{x}dx &= -\int_a^b \frac{(\cos x)'}{x}dx \\
&= -\Big[\frac{\cos x}{x}\Big]_a^b - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}dx \\
&= \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad \left| \int_a^b \frac{\sin x}{x}dx \right| &\leq \left|\frac{\cos a}{a}\right| + \left|\frac{\cos b}{b}\right| + \int_a^b \frac{dx}{x^2} \\
&\leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2}{a}
\end{aligned}
$$

(2)　$0 < L_1 < L_2$ に対し (1) より

$$\left| \int_{L_1}^{L_2} \frac{\sin x}{x}\,dx \right| \leq \frac{2}{L_1}$$

であるから $^\forall \varepsilon > 0$ に対し $\frac{2}{L} < \varepsilon$ となるように L をとると
$L < L_1 < L_2$ なる L_1，L_2 に対し

$$\left| \int_{L_1}^{L_2} \frac{\sin x}{x}dx \right| < \frac{2}{L} < \varepsilon$$

$\therefore$　Cauchy の判定法により $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束する.

問 43(2003/11/26)(教科書演習問題 105)

どんな分割 Δ に対しても $K_{ij} = [x_i, x_{i-1}] \times [y_j, y_{j-1}]$ の中に x, y が共に有理数である点とそうでない点が存在する.

点 $(\xi_i, \eta_j) \in K_{ij}$ の ξ_i, η_j を有理数に取れば
$\sum_{i,j} f(x,y)\mu(K_{ij}) = 1$
点 $(\xi_i, \eta_j) \in K_{ij}$ の ξ_i, η_j の片方を無理数に取れば
$\sum_{i,j} f(x,y)\mu(K_{ij}) = 0$

$\therefore$　$|\Delta| \to 0$ での極限値が存在しないので積分不可能.