教科書演習問題

演習問題５４

微分可能な関数 $u(x,y)$ が $u-x=f(u-y)$ をみたすならば（ただし $f(t)$ は微分可能な関数）$u(x,y)$ は $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=1$ を満たすことを示せ。

演習問題５７

$f=f(x,y), x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ のとき $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$ を示せ。

演習問題５８

$f=f(x,y), x=u+v, y=uv$ のとき、f は x,y を変数とする C^2 級関数として（←本文にはありませんでしたがこの条件がないと解けません。）

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を示せ。

（また $f(x,y)$ を u,v で編微分するなら $f(x,y)=F(u,v)$ と u,v を変数とする別の表し方をして $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}$ とする必要があるように思います。）

演習問題６５

z を xy 平面状の領域 $\{(x,y)\mid y>0\}$ 上の関数とするとき，z が xy の C^1 級関数である（すなわち C^1 級関数 F で $z=F(xy)$ と書ける）ためには z が x,y の C^1 級関数で $xz_x=yz_y$ を満たすことが必要十分であることを示せ。

演習問題３３

関数 $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ を $-1<x<1$ としてテイラー展開せよ。

演習問題３５（１）

関数 $\log(1-x^2)$ のテイラー展開を求めよ。成立する x の範囲も求めよ。

演習問題１２０

ある自然数 m,l に対して $\lim_{n\to\infty} a_{m+ln}=b$ であっても $\lim_{n\to\infty} a_n=b$ が成り立つとは言えないことを示せ。

演習問題１２１

$\lim_{n\to\infty} a_n=b$ ならば $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=b$ であることを示せ。

演習問題１２３

数列 $a_n\,(n=1,2,\ldots)$ が任意の自然数 n に対して $(a_{n+1}+1)^2+(a_n-1)^2\leq 2$ をみたすならば a_n は 0 に収束することを示せ。

334ページ：例題
$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}=2$ を示せ。
問54
$u-x=f(u-y)$ を x と y でそれぞれ編微分して
$\dfrac{\partial u}{\partial x}-1=\dfrac{\partial f(u-y)}{\partial(u-y)}\dfrac{\partial(u-y)}{\partial x}=f'(u-y)\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ー (1)
$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial f(u-y)}{\partial(u-y)}\dfrac{\partial(u-y)}{\partial y}=f'(u-y)\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}-1\right)$ ー (2)
$f'(u-y)$ を消去するために $(1)\times\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}-1\right)-(2)\times\dfrac{\partial u}{\partial x}$ によって右辺を消去し
$\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}-1\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1\right)-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ より $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=1$

問57
$\dfrac{\partial f}{\partial r}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}$
$\dfrac{\partial f}{\partial \theta}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}$
よって $\left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$
問58
$\dfrac{\partial f}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+u\dfrac{\partial f}{\partial y}$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)=\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial u}\left(u\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$
$=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\dfrac{\partial y}{\partial u}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(u\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\dfrac{\partial y}{\partial u}$
$=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+v\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)+v\dfrac{\partial}{\partial y}\left(u\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ $\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}=1\right.$，$\dfrac{\partial y}{\partial u}=v$ より)
$\left(\right.$ここで $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}+u\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(u\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial y}+u\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
より $\left.\right)$
$=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(u+v)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+uv\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\dfrac{\partial f}{\partial y}$
$=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\dfrac{\partial f}{\partial y}$
よってあとは $\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=1$ を示せばよく、これは $1=\dfrac{\partial u}{\partial u}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}$ より示される。

問65

$u = xy, v = y$ とおく，$y > 0$ より x, y について $x = \dfrac{u}{v}, y = v$ と解くことができるので $z(x,y) = F(u,v)$ となる関数 F が存在する。

$z_x = \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial u} \cdot y + \dfrac{\partial F}{\partial v} \cdot 0 = y\dfrac{\partial F}{\partial u}$

$z_y = \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial u} \cdot x + \dfrac{\partial F}{\partial v} \cdot 1 = x\dfrac{\partial F}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial v}$

よって $xz_x = yz_y \Leftrightarrow y\dfrac{\partial f}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial F}{\partial v} = 0$（$y \neq 0$ より）

これは F が v によらない $u(= xy)$ だけの１変数関数であることを意味するので $xz_x = yz_y \Leftrightarrow z(x,y) = F(xy)$

問３３

$(1-x)^{-2} = 1 + (-2)(-x) + \dfrac{(-2)(-3)}{2!}(-x)^2 + \dfrac{(-2)(-3)(-4)}{3!}(-x)^3 + \ldots + \dfrac{(-1)^n(n+1)!}{n!}(-x)^n + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

よって $\dfrac{x}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}nx^n$

問３５

$\log(1-x^2) = \log(1+x) + \log(1-x)$ であり

$-1 < x \leq 1$ のとき $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots$ が成立

$-1 < -x \leq 1$ のとき $\log(1-x) = (-x) - \dfrac{(-x)^2}{2} + \dfrac{(-x)^3}{3} - \dfrac{(-x)^4}{4} + \ldots$

$= -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \ldots$ が成立

よって $-1 < x < 1$ のとき $\log(1-x^2) = -x^2 - \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^6}{3} - \ldots = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$ が成立

問１２０

例えば $a_n = (-1)^n$ と数列を定めれば $m = 1, l = 2$ として $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{m+ln} = 1$ だが $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在しない。

問１２１

$\lim_{n\to\infty} a_n = b$ より $\forall\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在して $n > N \Rightarrow |a_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

よって $n > N$ として、また任意の a_n に対して $|a_n - b| < R$ となる R が存在して（a_n は収束するので有界であるから）

$\left|\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} - b\right| = \left|\dfrac{(a_1 - b) + (a_2 - b) + \ldots + (a_n - b)}{n}\right|$

$\leq \dfrac{|a_1 - b| + |a_2 - b| + \ldots + |a_N - b|}{n} + \dfrac{|a_{N+1} - b| + \ldots + |a_n - b|}{n}$

$< \dfrac{NR}{n} + \dfrac{(n-N)\varepsilon}{2n} < \dfrac{NR}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$

ここで $\dfrac{NR}{N_0} < \dfrac{1}{2}\varepsilon$ となるように N_0 をとることができ

$n > N_0 \Rightarrow \left| \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} - b \right| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = b$

問１２３

$(a_{n+1} + 1)^2 + (a_n - 1)^2 \leq 2$ よって $2(a_{n+1} - a_n) \leq a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} + a_n^2 - a_n \leq 0$

$a_{n+1} \leq a_n$ が任意の自然数 n で成立するので $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列

また $(a_n - 1)^2 \leq (a_{n+1} + 1)^2 + (a_n - 1)^2 \leq 2$ より $1 - \sqrt{2} \leq a_n \leq 1 + \sqrt{2}$ であるので $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界

よって $\alpha = \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在し $(\alpha + 1)^2 + (\alpha - 1)^2 \leq 2 \Rightarrow \alpha^2 \leq 0$ より $\alpha = 0$

よって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する

３３４ページ：例題

$a_0 = 0, a_1 = \sqrt{2}, \ldots, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \ldots$ と単調増加数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定める

（a_{n+1} は a_n のいちばん内側の $\sqrt{\quad\quad}$ に $\sqrt{2}$ を加えた形ともとれるのでその分大きい）

このとき $a_1 < 3$ であり $a_n < 3 \Rightarrow a_{n+1} < \sqrt{2+3} < 3$ であるから、任意の自然数 n で $a_n < 3$ が成立する。よってこの単調増加数列は上に有界

よって $\alpha = \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在し、それは $\alpha = \sqrt{\alpha + 2}$ より $\alpha = 2$ である

また $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在することをコーシーの判定法で示すと

$|a_n - a_{n-1}| = \left| \sqrt{2 + a_{n-1}} - \sqrt{2 + a_{n-2}} \right| = \left| \dfrac{a_{n-1} - a_{n-2}}{\sqrt{2 + a_{n-1}} + \sqrt{2 + a_{n-2}}} \right| < \dfrac{|a_{n-1} - a_{n-2}|}{2}$

よって $|a_n - a_{n-1}| < \dfrac{a_1 - a_0}{2^{n-1}} = \sqrt{2}\, 2^{1-n} < 2^{2-n}$

従って $m < n$ として

$|a_n - a_m| = |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \ldots + a_{m+1} - a_m| \leq |a_n - an - 1| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \ldots + |a_{m+1} - a_m| < 2^{2-n} + 2^{3-n} + \ldots + 2^{1-m} = 2^{2-n}\dfrac{2^{n-m} - 1}{2 - 1} < 2^{2-n}2^{n-m} = 2^{2-m}$

（$N < m < n$ かつ $2 - N < \log_2 \varepsilon$ とすれば $2^{2-m} < 2^{2-N} < \varepsilon$ となると考え）

よって任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して $2 - \log_2 \varepsilon < N$ と自然数 N を定めれば

$N < m < n \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

よってコーシーの判定法より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する