数学 I_A 前期試験　理科１類６，７，８，１３，１４，１５組　（担当　上村）
２００６年9月5日（月）１０：５０〜１２：２０
両面解答用紙２枚　計算用紙１枚

（注）教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問１　次の命題は正しいか誤りかを判定し、正しければ証明し誤りならば判例を挙げよ。

（１）数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $|a_n| < 1$ をみたすとき，$\lim_{n\to\infty} a_1 a_2 \ldots a_n = 0$.

（２）f を $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数で，任意の $\lambda \geq 0$ と任意の $X \in \mathbf{R}^n$ に対し $f(\lambda X) = \lambda f(X)$ をみたすとする．また，$|X| = 1$ のとき $f(X) > 0$ とする．このとき，$f(X) \geq m|X|$ なる $m > 0$ が存在する．

問２　$\mathbf{R}^2$ 上の C^4 級関数 $u(x,y)$ が $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \log(x^2+y^2+1)$ をみたすとき，$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ を求めよ．

問３　$f(x,y)$ を $\mathbf{R}^2$ 上の C^1 級関数とし，$u(x,y,z) = f(x^2+2ye^z\,,\, y^2+2xe^z)$ とするとき

$$(y^2e^z - xe^{2z})\frac{\partial u}{\partial x} + (x^2e^z - ye^{2z})\frac{\partial u}{\partial y} + (e^{2z} - xy)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

が成立することを証明せよ．

問４　（１）$\sqrt{1-x}$ を $x=0$ を中心として Taylor 展開せよ．また，この展開が $|x| < r$ で成立する定数 r の上限を求めよ．

（２）a を 0 でない実数とするとき，$\dfrac{1}{1-ax}$ を $x=0$ を中心として Taylor 展開せよ．
また，この展開が $|x| < r$ で成立する定数 r の上限を求めよ．

（３）次が成立するように実数 a, b の値を定めよ．

$$\sqrt{1-x} - \frac{1-bx}{1-ax} = o(x^2) \quad (x \to 0)$$

問５　関数 $f(x,y) = x(x^2+x+y^2-1)$ の極値を求めよ。

問１

（１）誤り：反例は $a_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ など．(分母) $>$ (分子) > 0 なので $|a_n| < 1$ をみたすが $a_1 a_2 \ldots a_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$ であり $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_1 a_2 \ldots a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$

（２）$X = 0$ の場合は $f(0) = \lambda f(0)$ が任意の $\lambda \geq 0$ で成立するので $f(0) = 0$．よって任意の $m > 0$ で $f(0) \geq m|X|(= 0)$ が成立．

$X \neq 0$ の場合は，X は $|Y| = 1$ である $Y \in \mathbf{R}^n$ と $k > 0$ である実数 k を用いて $X = kY$ と表すことができる．またこのとき $|X| = |kY| = |k||Y| = k$ である．また $|Y| = 1$ となる $\mathbf{R}^n$ 上の領域は有界閉集合であり，$f(Y)$ は連続関数なので $|Y|$ には最大値と最小値が存在する．よってその最小値を M とする．問題文より $M > 0$ である．

すると $f(X) = f(kY) = kf(Y) \geq kM = M|X|$

そこで m を $M \geq m > 0$ となるようにとれば $f(X) \geq m|X|$ が成立する．よって $f(X) \geq m|X|$ なる $m > 0$ が存在する．

問２

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \log(x^2 + y^2 + 1)$ を x, y で２回ずつ偏微分して

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \text{－（１）}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{2x^2 - 2y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \text{－（２）}$$

u は C^4 級関数なので $\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} = \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$ より，（１）式と（２）式を足して

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

問３

$s = x^2 + 2ye^z, t = y^2 + 2xe^z$ とおき，$u(x, y, z)$ を x, y, z でそれぞれ偏微分して

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = (2x)\frac{\partial f}{\partial s} + (2e^z)\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = (2e^z)\frac{\partial f}{\partial s} + (2y)\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z} = (2ye^z)\frac{\partial f}{\partial s} + (2xe^z)\frac{\partial f}{\partial t}$$

これらの $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ を与式の左辺に代入すると $0 \times \dfrac{\partial f}{\partial s} + 0 \times \dfrac{\partial f}{\partial s} = 0$ となって問題の式が成立.

問４ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^n + \ldots$

$(-1 < x < 1)$ は $\forall\alpha \in \mathbf{R}$ で成立

αが自然数ならば $(-\infty < x < \infty)$ で成立　（２項展開）

$x = 1$ のところは$\alpha > -1$ で成立

$x = -1$ のところは$\alpha > 0$ で成立 です.

α の値によって $x = 1, x = -1$ が含まれるかが分かりにくいですが，この問題では「上限」を問い，そこを厳密に覚えてなくても解答できるというサービスがとられています.

（１）$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(-x) + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2!}(-x)^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}(-x)^3 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4!}(-x)^4$

$= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1\cdot3}{3!2^3}x^3 - \frac{1\cdot3\cdot5}{4!2^4} + \ldots + -\frac{(2n-3)!}{n!(n-2)!2^{2n-2}}x^n - \ldots$

$= 1 - \frac{1}{2}x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!}{n!(n-2)!2^{2n-2}}x^n$

指数が $\frac{1}{2}$ なので Taylor 展開可能な $-x$ の範囲は $-1 \leq -x \leq 1$．よって $|x| \leq 1$ で成立する．よって r の上限は 1

（途中で $1\cdot3\cdot\ldots(2n-3) = \frac{(2n-3)!}{(n-2)!2^{n-2}}$ を使った.）

（２）$\frac{1}{1-ax} = (1-ax)^{-1}$

$= 1 + (-1)(-ax) + \frac{(-1)(-2)}{2!}(-ax)^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}(-ax)^3 + \ldots + (-1)^{2n}\frac{n!}{n!}a^n x^n + \ldots$

$= 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$

指数が -1 なので Taylor 展開可能な $-ax$ の範囲は $-1 < -ax < 1$.

よって $|x| \leq \frac{1}{|a|}$ で成立する．r の上限は $\frac{1}{|a|}$

（３）上の（１）（２）より $\sqrt{1-x} - \frac{1-bx}{1-ax} =$

$(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)) - (1-bx)(1 + ax + a^2x^2 + o(x^2))$

$= (-\frac{1}{2} - a + b)x + (-\frac{1}{8} - a + ab)x^2 + o(x^2)$

この係数が 0 になるような a, b の値は $a = \frac{1\pm\sqrt{3}}{4}$, $b = \frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$

$(a,b) = (\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4})(\frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{3-\sqrt{3}}{4})$

問５の解答は１９９５年度の解答を参照のこと.