数学 I_A 前期試験　理科１類１８，１９，２０，２１組　（担当　上村）
２００５年9月5日（月）１０：５０〜１２：２０
両面解答用紙２枚　計算用紙１枚

（注）教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問１　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，次の問に答えよ。
（１）次の (1) から (4) のうち，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と同値であるものを選び，その番号を記せ。(番号だけ明記すればよい。)
(1)　$\sup_n a_n = \inf_n a_n = 0$
(2)　$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} \inf a_n = 0$
(3)　任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$n > N$ ならば $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ となるような自然数 N が存在する。
(4)　任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$n > m > N$ ならば $|a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon$ となるような自然数 N が存在する。

（２）　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば，数列 $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{n-k}}$ も 0 に収束することを証明せよ。

問２　$f(x,y)$ は $\mathbf{R}^2$ の領域 $\{(x,y) \mid x+y>0\}$ で定義された C^4 級関数で

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \log(x+y)$$

をみたすとする。このとき、次を求めよ。
（１）$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$　（２）$\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4}$

問３　$f(x,y)$ は $\mathbf{R}^2$ 上の C^2 級関数で，任意の $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ に対し，関係式

$$f(x+y, x-y) - 2f(x,y) = x$$

をみたすとする。このとき，次の問に答えよ。
（１）$f_x(0,0)$ および $f_y(0,0)$ の値を求めよ。
（２）任意の $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ に対し，関係式

$$f_{xx}(x+y, x-y) + f_{yy}(x+y, x-y) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$$

が成り立つことを証明せよ。

問４　（１）$x = 0$ を含む区間で $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^x - 1)^n$ が成り立つように定数 $a_n (n = 1, 2, \ldots)$ を定めよ。また、この式が成り立つ x の範囲を記せ。
（２）$x \to 0$ のとき，$\dfrac{x}{e^x - 1} = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$ となるように定数 a, b, c, d を定めよ。

問５　関数 $f(x,y) = x^3 - 6xy + 8y^3$ の極値を求めよ。

問１

（１）(1)$\sup_n a_n$ とは $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上限のことだそうです。同様に $\inf_n a_n$ は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の下限のことです。

上限、下限の定義より $\forall n(\in \mathbf{N})$ に対し $a_n \leq 0$ かつ $a_n \geq 0$

よって $a_n = 0$ $(\forall n \in \mathbf{N})$　これは $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と同値ではありません。

(2) 命題１．５より $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} \inf a_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ です。よって $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と同値です。

(3)$\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{4}$ とおけば、「任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$n > N \Rightarrow |a_n| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ となるような自然数 N が存在する。」は「任意の $\varepsilon' > 0$ に対し、$n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon'$ となるような自然数 N が存在する。」になります

よってこれは $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と同値です。

(4)$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a_n = \dfrac{1}{n}$ と定められていれば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ をみたします。しかし $n = 2m$ とすると $|a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m+1} + \ldots + \dfrac{1}{2m} > \dfrac{m+1}{2m} > \dfrac{1}{2}$ より、$0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$ と ε を定めると、どのように自然数 N を決めても、$N < m < n$ でも $n = 2m$ の場合は $|a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon$ は成立しません。よって同値ではありません。

（２）$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ より、$\forall\varepsilon > 0$ に対して $n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$ となる自然数 N が存在する。

$|b_n| = \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{n-k}} \right| = \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{2^{n-k}} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{a_k}{2^{n-k}} \right| \leq \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{2^{n-k}} \right| + \left| \displaystyle\sum_{k=N+1}^{n} \frac{a_k}{2^{n-k}} \right|$ である。

$$\left| \sum_{k=N+1}^{n} \frac{a_k}{2^{n-k}} \right| = \left| \frac{a_{N+1}}{2^{n-(N+1)}} + \frac{a_{N+2}}{2^{n-(N+2)}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-(n-1)}} + \frac{a_n}{2^{n-n}} \right|$$
$$\leq \left| \frac{a_{N+1}}{2^{n-(N+1)}} \right| + \left| \frac{a_{N+2}}{2^{n-(N+2)}} \right| + \ldots + \left| \frac{a_{n-1}}{2^1} \right| + \left| \frac{a_n}{2^0} \right|$$
$$= \frac{|a_{N+1}|}{2^{n-(N+1)}} + \frac{|a_{N+2}|}{2^{n-(N+2)}} + \ldots + \frac{|a_{n-1}|}{2} + |a_n|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2^{n-(N+1)}} + \frac{\varepsilon}{2^{n-(N+2)}} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon$$
$$= \varepsilon \left(\frac{1}{2^{n-(N+1)}} + \frac{1}{2^{n-(N+2)}} + \ldots + \frac{1}{2} + 1 \right)$$
$$= \varepsilon \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^{n-N}} \right) < 2\varepsilon$$

また $\left| \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{2^{n-k}} \right| = \dfrac{1}{2^n} \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{N} 2^k a_k \right|$　ここでは N は一定なので $\left| \displaystyle\sum_{k=1}^{N} 2^k a_k \right|$ も一定。

$n > N_0(\geq N)$ ならば $\left| \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{2^{n-k}} \right| = \dfrac{1}{2^n} \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{N} 2^k a_k \right| < \varepsilon$ となる N_0 がとれる。

これより $\forall\varepsilon$ に対して $n > N_0$ ならば

$$|b_n| \leq \left| \sum_{k-1}^{N} \frac{a_k}{2^(n-k)} \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{n} \frac{a_k}{2_{n-k}} \right| < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$$

$3\varepsilon = \varepsilon'$ とすれば $\forall\varepsilon' > 0$ に対し $n > N_0 \Rightarrow |b_n - 0| < \varepsilon'$ となる自然数 N_0 が存在する

よって $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

または最初から，$|a_n| < \varepsilon$ を $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, 途中を $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{2^{n-k}}\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ と変えて $|b_n| < \varepsilon$ とする。

問２

（１）$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \longleftarrow$($f$ は C^2 級だから)

$= \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

$= \dfrac{\partial}{\partial x}(\log(x+y)) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\log(x+y))$

$= \dfrac{2}{x+y}$

（２）$\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4} = \dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2} - \dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4} \longleftarrow$($f$ は C^4 級だから)

$= \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$

$= \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{2}{x+y}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\dfrac{2}{x+y}\right)$

$= \dfrac{4}{(x+y)^3} + \dfrac{4}{(x+y)^3} = \dfrac{8}{(x+y)^3}$

問３ $f(x,y)$ の直接の変数は x,y です。ですから x,y でそのまま偏微分されて $f_x(x,y), f_y(x,y)$ となります。ですが $f(x+y, x-y)$ の直接の変数は $x+y, x-y$ ですから x,y で偏微分する場合 $x+y, x-y$ をはさんで偏微分してやる必要があることに注意してください。また $f_x(x+y, x-y), f_y(x+y, x-y)$ の添え字の x,y はそれぞれ第一変数での偏微分、第二変数での偏微分という意味です。ですから $\dfrac{\partial f(x+y, x-y)}{\partial(x+y)} = f_x(x+y, x-y)$, $\dfrac{\partial f(x+y, x-y)}{\partial(x-y)} = f_y(x+y, x-y)$ となるのです。二通りの x,y の用法に注意してください。また以下での f, F の違いは、$f(x+y, x-y)$ は $x+y, x-y$ を直接の変数としており x,y は間接的な変数となっているのに対し、F は同じ関数を角度を変えて、$F(x,y)$ と x,y を直接の変数に持ってきている。というものです。以下の問題でもこれらのことをある程度意識しておいてください。

（１）$s = x+y, t = x-y$ とおいて $F(x,y) = f(x+y, x-y) = f(s,t)$ を x,y でそれぞれ偏微分して

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial s} + \dfrac{\partial f}{\partial t} = f_x(x+y, x-y) + f_y(x+y, x-y)$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial s} - \dfrac{\partial f}{\partial t} = f_x(x+y, x-y) - f_y(x+y, x-y)$

($\dfrac{\partial s}{\partial x} = 1, \dfrac{\partial t}{\partial x} = 1, \dfrac{\partial s}{\partial y} = 1, \dfrac{\partial t}{\partial y} = -1$ より。)

よって $f(x+y, x-y) + 2f(x,y) = x$ を x,y で偏微分すると

$f_x(x+y,x-y)+f_y(x+y,x-y)-2f_x(x,y)=1$ ー (1)

$f_x(x+y,x-y)-f_y(x+y,x-y)-2f_y(x,y)=0$ ー (2)

(1), (2) に $x=0, y=0$ を代入して

$f_x(0,0)+f_y(0,0)-2f_x(0,0)=1, f_x(0,0)-f_y(0,0)-2f_y(0,0)=0$

よって $f_x(0,0)=-\dfrac{3}{2}, f_y(0,0)=-\dfrac{1}{2}$

（２）(1) を x で偏微分, (2) を y で偏微分して（$f_x(x+y,x-y), f_y(x+y,x-y)$ を s,t をはさんで偏微分するのは (1) と同じ）

$f_{xx}(x+y,x-y)+f_{xy}(x+y,x-y)+f_{yx}(x+y,x-y)+f_{yy}(x+y,x-y)-2f_{xx}(x,y)=0$

$f_{xx}(x+y,x-y)-f_{xy}(x+y,x-y)-f_{yx}(x+y,x-y)+f_{yy}(x+y,x-y)-2f_{yy}(x,y)=0$

この二つの式を足して

$2f_{xx}(x+y,x-y)+2f_{yy}(x+y,x-y)-2f_{xx}(x,y)-2f_{yy}(x,y)=0$

よって $f_{xx}(x+y,x-y)+f_{yy}(x+y,x-y)=f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$

問４　局所テイラー、テイラー展開に加え（講義内容編　3.2, 3.3)、特に次のことを覚えておきましょう

$e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\ldots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n\ (-\infty<x<\infty)$

$\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5-\dfrac{1}{7!}x^7+\ldots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\ (-\infty<x<\infty)$

$\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4-\dfrac{1}{6!}x^6+\ldots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\ (-\infty<x<\infty)$

$\log(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+\ldots=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^n\ (-1<x\le 1)$

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^n+\ldots$

$(-1<x<1)$ は $\forall\alpha\in\mathbf{R}$ で成立

αが自然数ならば $(-\infty<x<\infty)$ で成立　（２項展開）

$x=1$ のところは$\alpha>-1$ で成立

$x=-1$ のところは$\alpha>0$ で成立

また x を $-x$ で置き換え、$\alpha=-1$ とすると $(-1<x<1)$

$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

例　$e^{2x}=1+2x+\dfrac{1}{2!}(2x)^2+\dfrac{1}{3!}(2x)^3+\ldots\ (-\infty<x<\infty)$

$e^{\sin x}=1+\sin x+\dfrac{1}{2!}\sin^2 x+\dfrac{1}{3!}\sin^3 x+\ldots\ (-\infty<x<\infty)$

$e^x\sin x=\left(1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right)\left(x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5+o(x^5)\right)$

$=x+x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{30}x^5+o(x^5)\ (-\infty<x<\infty)$

確認ですが $o(g(x))\ as\ x \to c$ とは $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ となる $f(x)$ のことです。上式で、6 次以上の項、$o(x^4)\times x, o(x^4)\times x^3$、$o(x^5)\times x, o(x^5)\times x^2$ などがすべて $o(x^5)$ でまとめられることは定義よりわかります。

（1）$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(e^x-1)^n$ に $x = \log(1+t)$ を代入し

$\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$

よって $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ であり、成立範囲は $-1 < t \leq 1$、すなわち $x \leq \log 2$

（2）$x \to 0$ では $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$

$\frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{1+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o(x^3)} \quad \longleftarrow \frac{o(x^4)}{x} = o(x^3)$

よって $1 = \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)\right)(a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3))$

$= a + \left(\frac{a}{2} + b\right)x + \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c\right)x^2 + \left(\frac{a}{24} + \frac{b}{6} + \frac{c}{2} + d\right)x^3 + o(x^3)$

係数を比較し $a = 1,\ \frac{a}{2} + b = 0,\ \frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c = 0,\ \frac{a}{24} + \frac{b}{6} + \frac{c}{2} + d = 0$

よって $a = 1, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{12}, d = 0$

補足：$o(x^3)$ が残ってる、と思うかもしれませんが、ここでは $o(x^3)$ は x の 4 次以上の項の集まりという意味でしかありません。ですから $o(x^3) = ex^4 + fx^5 + gx^6 + \ldots$ と表せば $e = f = g = \ldots = 0$ となっていて 0 に等しいわけです。

問 5

$f_x(x,y) = 3x^2 - 6y,\ f_y(x,y) = -6x + 24y^2$

よって $f_x(x,y) = 0$ かつ $f_y(x,y) = 0 \iff x^2 - 2y = 0$ かつ $-x + 4y^2 = 0$

これより極値を取る点の候補は $(x,y) = (0,0), (1, \frac{1}{2})$

$f_{xx} = 6x, f_{xy} = -6, f_{yy} = 48y$

これより $Hesse$ 行列 H は、$H = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{pmatrix}$

$(x,y) = (0,0)$ では $H = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

$ab - h^2 = -36 < 0$

$(0,0)$ は f の $saddle\,point$

$(x,y) = (1, \frac{1}{2})$ では $H = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{pmatrix}$

$ab - h^2 = 108 > 0$ で $a > 0$
$f\left(1, \dfrac{1}{2}\right) = -1$ だから、f は $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ で極小値 -1 をとる。