数学 I_A 前期試験　理科１類１，２，２１，２２，２３，２４組　（担当　上村）
１９９５年9月5日（火）３：００〜４：３０
両面解答用紙２枚　計算用紙１枚

（注）教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問１　数列 $a_n\,(n=1,2,\ldots)$ について次の命題は正しいか？正しければ証明し誤りならば反例を挙げよ。

（１）　$\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = 0$ ならば a_n は収束する。

（２）　$a_n > 0$，$\lim_{n\to\infty}\sup a_n = 0$ ならば a_n は収束する。

問２　$f(x,y)$ をすべての $t \in \mathbf{R}$ とすべての $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ に対し $f(tx,ty) = tf(x,y)$ を満たす関数とするとき、

（１）$f(x,y)$ が原点で連続であるためには $f(x,y)$ が単位円周上で有界であること，すなわち $\sup\{|f(x,y)| \mid x^2+y^2=1\} < \infty$ が必要十分である。これを証明せよ。

（２）$f(x,y)$ が原点で微分可能であるならば $f(x,y) = ax+by$（ただし、a,b は定数）であることを証明せよ。

問３　$u=2x+y,\ v=2x^2+2xy+y^2$（ただし $y>0$）とするとき、

（１）偏微分方程式 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ を $u,\ v$ の方程式に変換せよ。

（２）$\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{x+y}{y}$ が成立することを示せ。また、$\dfrac{\partial x}{\partial v},\ \dfrac{\partial y}{\partial u},\ \dfrac{\partial y}{\partial v}$ を求めよ。

問４　関数 $f(x,y) = x(x^2+x+y^2-1)$ の極値を求めよ。

問1

（1）コーシーの判定法の例に出てきた、数列 $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ は発散するという事実を使いましょう。

誤り：$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ で定めると $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$n > m > N$ として $n = 2m$ とすると

$|a_n - a_m| = \left| \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m-1} + \ldots + \frac{1}{m+1} \right| > \left| \frac{1}{2m} \times m \right| = \frac{1}{2}$

よって $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ と $\forall\varepsilon$ を定めると，$n > m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$ となる N は存在しない。よって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しない。

（2）正しい：$\limsup a_n = 0$ なので上極限の定義より $\forall\varepsilon > 0$ に対し $\varepsilon \leq a_n$ となる a_n は有限個

よって $n > N \Rightarrow 0 < a_n < \varepsilon$ となる自然数 N が存在するので，その N に対し $n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$

すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

問2

（1）$f(0,0) = tf(0,0)$ が任意の t について成立するので $f(0,0) = 0$

$f(x,y)$ が原点で連続であるならば $\forall\varepsilon > 0$ に対して$\delta > \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| < \varepsilon$となる$\delta$が存在する

この式全体に$\frac{2}{\delta}$をかけて $2 > \sqrt{\left(\frac{2x}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{2y}{\delta}\right)^2} \Rightarrow |f(\frac{2x}{\delta}, \frac{2y}{\delta})| < \frac{2\varepsilon}{\delta}$

$x' = \frac{2x}{\delta}, y' = \frac{2y}{\delta}$とおきなおすと $2 > \sqrt{x'^2 + y'^2} \Rightarrow |f(x', y')| < \frac{2\varepsilon}{\delta}$

よって $\sup\{|f(x,y)| \mid x^2+y^2 = 1\} \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} < \infty$ となる

逆に $\sup\{|f(x,y)| \mid x^2+y^2 = 1\} = M$ とすると$\sqrt{x^2+y^2} < \frac{\varepsilon}{M}$のとき

$|f(x,y) - f(0,0)| = |\sqrt{x^2+y^2} f(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})|$

$< |\frac{\varepsilon}{M} \sup\{|f(x,y)| \mid x^2+y^2 = 1\}| = |\frac{\varepsilon}{M} M| = \varepsilon$

つまり $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ と定めると $\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$ より原点で連続

（2）$f(x,y)$ が原点で微分可能であるので $f(x,y)$ は $f(x,y) = f(0,0) + a(x-0) + b(y-0) + \varepsilon(x,y)$ と表すことができ，さらに $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ となる。

ここで $f(tx,ty) = atx + bty + \varepsilon(tx,ty), tf(x,y) = atx + bty + t\varepsilon(x,y)$ であり、この2つが一致するので $t\varepsilon(x,y) = \varepsilon(tx,ty)$ が成立する

よってここで $x=t\cos\theta, y=t\sin\theta$とすると $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{t\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta)}{t}$
$\displaystyle=\lim_{t\to 0}\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta)=0$
よって $\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta)=0$ が任意の θ で成立し、それより任意の x,y に対し
$\varepsilon(x,y)=\varepsilon(t\cos\theta,t\sin\theta)=t\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta)=0$ が成立する
よって $f(x,y)$ は $f(x,y)=ax+by$ である。

問3
（1）$\displaystyle\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2\frac{\partial z}{\partial u}+(4x+2y)\frac{\partial z}{\partial v}$
$\displaystyle\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}+(2x+2y)\frac{\partial z}{\partial v}$
これを $\displaystyle x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$ に代入して
$\displaystyle(2x+y)\frac{\partial z}{\partial u}+(4x^2+4xy+2y^2)\frac{\partial z}{\partial v}=u\frac{\partial z}{\partial u}+2v\frac{\partial z}{\partial v}=0$
（2）$\displaystyle u=(2x+y)\,,\,v=\frac{1}{2}(2x+y)^2+\frac{1}{2}y^2$ に着目し $s=2x+y\,,\,t=y^2$ と置く。
$\displaystyle u=s\,,\,v=\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}t$ より逆に s,v を u,v の関数として $s=u,t=2v-u^2$ と書ける
また $s=2x+y\,,\,t=y^2$ かつ $y>0$ より x,y を s,t の関数として $\displaystyle y=\sqrt{t}\,,\,x=\frac{1}{2}(s-\sqrt{t})$
と書ける
よって $\displaystyle\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}=\frac{1}{2}\cdot 1+\left(-\frac{1}{4\sqrt{t}}\right)\cdot(-2u)=\frac{1}{2}+\frac{2x+y}{2y}=\frac{x+y}{y}$
$\displaystyle\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}=\frac{1}{2}\cdot 0+\left(-\frac{1}{4\sqrt{t}}\right)\cdot 2=-\frac{1}{2y}$
$\displaystyle\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}=0\cdot 1+\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\cdot(-2u)=-\frac{2x+y}{y}$
$\displaystyle\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}=0\cdot 0+\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\cdot 2=\frac{1}{y}$

問4　$f_x(x,y)=3x^2+2x+y^2-1\,,\,f_y(x,y)=2xy$
よって $f_x(x,y)=0$ かつ $f_y(x,y)=0\ \Leftrightarrow\ 3x^2+2x+y^2-1=0$ かつ $2xy=0$
これより極値を取る点の候補は $(x,y)=(0,\pm1),(-1,0)(\frac{1}{3},0)$
$f_{xx}=6x+2, f_{xy}=2y, f_{yy}=2x$
これより $Hesse$ 行列 H は、$H=\begin{pmatrix}6x+2 & 2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix}$
$(x,y)=(0,\pm1)$ では $H=\begin{pmatrix}2 & \pm1\\ \pm1 & 0\end{pmatrix}$
$ab-h^2=-1<0$

$(0, \pm 1)$ は f の $saddle\,point$
$(x, y) = (\frac{1}{3}, 0)$ では $H = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
$ab - h^2 = \frac{8}{3} > 0$ で $a > 0$
$f(\frac{1}{3}, 0) = -\frac{5}{27}$だから、$f$ は $(\frac{1}{3}, 0)$ で極小値 $-\frac{5}{27}$をとる。
$(x, y) = (-1, 0)$ では $H = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
$ab - h^2 = 8 > 0$ で $a < 0$
$f(-1, 0) = 1$ だから、f は $(-1, 0)$ で極大値 1 をとる。
よって $f(x, y)$ は $(-1, 0)$ で極大値 $1, (\frac{1}{3}, 0)$ で極小値 $-\frac{5}{27}$ をとる