総合科目物理と数学１期末試験 (2006.7.3)

1. $a \gg h$ のとき、関数 $f(a+h)$ の a におけるテーラー展開は次式で与えられる:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^n(a) + \cdots$$ ．ここで $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3{\cdot}2{\cdot}1$ である。

   (a) $\alpha \gg h$ のとき、$\sin(\alpha + h)$ を α においてテーラー展開せよ。少なくとも最初の３項を示すこと。

   (b) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2} = 0.707$ を使って、$\sin 49^\circ$ および $\cos 49^\circ$ の近似値を有効数字２桁以上で求めよ。(ヒント：$4\pi/180 = 0.0698$)

2. 重力加速度を g として、長さ l の糸につるした質量 m の質点を鉛直面内で振らせたときの運動を考える。

   (a) 振り子の支点を原点とする極座標 (r, θ) を取り、振れ角 θ に対する運動方程式を導け。また、振れ角が小さいときの振動数 ω_0 を g と l で表わせ。

   (b) 以下、角速度 ω での地球の自転を考慮に入れるため、図１に示す $x'y'z'$ 座標系 (地球とともに回転する慣性系) をとる。北極点でこの振り子に働く力の x'，y' 成分（それぞれ F'_x，F'_y とする）を、ω_0 を使って表わせ。ただし、糸の張力 S の大きさは、$|S| = m|g|$ とみなせるとしてよい。

   (c) コリオリ力と遠心力を考慮すると、x'，y' に対する運動方程式は以下のように書ける。

$$m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x'$$

$$m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2 y'$$

   (①+i②) を計算し、$\zeta = x' + iy'$ が満たす微分方程式とその解を求めよ。初期条件は時刻 $t = 0$ において $x' = a$，$y' = 0$ とする。

   (d) 振り子は振動しながら、時間とともにその振動面を回転させていく。この回転の向きは、北半球において図２の A，B のどちらになるか説明せよ。$x'y'$ 平面内での角度 ϕ 荷対する運動方程式を解いてこの理由を説明しても良い。

   (e) この振り子をニュルンベルク (緯度 49°) で振らせたとき、振動面は何時間で一回転するか。ただし、問１の結果を用いてよい。

3. 図３のように、ばね定数 k のばねに長さ l のひもがつき、その先端に質量 m の質点がぶら下がっている。質点がある鉛直面内を自由に振動し、ばねは鉛直方向にしか伸縮しないとき、以下の問いに答えよ。

   (a) 鉛直方向、水平方向の質点の位置を考えることにより Lagrangian を求め、運動方程式を求めよ。

   (b) θ が微小であり、$\sin\theta$，$\cos\theta$ を θ の一次までで近似できるとき、基準振動の角振動数 ω_0 を求めよ。ただし、ω_0 の二次まで求めればよい。

   (c) Hamiltonian を求めよ。(ここでは x，θ の一階微分が残っていても良いことにする。)

   (d) 上の Hamiltonian を x，θ についての一般運動量 p_x，p_θ を用いた式に書き換え、正準方程式を求めよ。

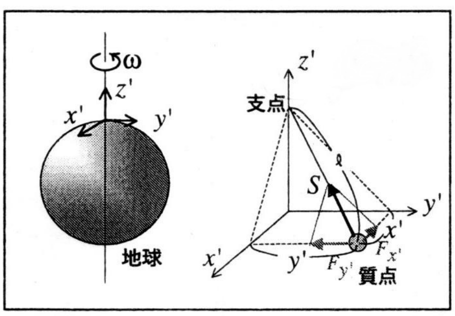

図1:振り子とx'y'z'座標系

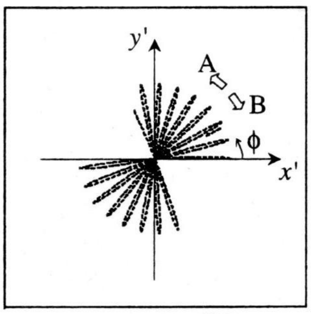

図2:振り子の軌跡

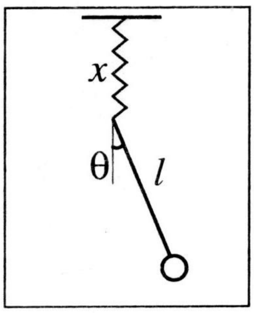

図3

注 自筆のノート、メモに限り持込可。問 2(c) の上の式が①、下の式が②。問 2(e) の緯度とは北緯のことです。